

NOV 26 1934

ZEITSCHRIFT FÜR PHYSIK

HERAUSGEGEBEN UNTER MITWIRKUNG
DER
DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

VON
KARL SCHEEL

91. BAND. 11. UND 12. HEFT

MIT 45 TEXTFIGUREN

(ABGESCHLOSSEN AM 23. OKTOBER 1934)



VERLAG VON JULIUS SPRINGER, BERLIN

1934

erscheint zwanglos in einzelnen Heften; 12 Hefte bilden einen Band.

Die Zeitschrift für Physik ist durch jede Buchhandlung sowie durch die Verlagsbuchhandlung Julius Springer, Berlin W9, Linkstraße 23/24, zu beziehen. Die Mitglieder der Deutschen Physikalischen Gesellschaft erhalten die Zeitschrift für Physik zu einem mit dem Vorstände der Gesellschaft vereinbarten Vorzugspreis geliefert.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich. Weitere 75 Exemplare werden, falls bei Rücksendung der 1. Korrektur bestellt, gegen eine angemessene Entschädigung geliefert. Darüber hinaus gewünschte Exemplare müssen zum gleichen Preise berechnet werden, den die Arbeit im Heft kostet, da die umfangreiche Versendung von Sonderdrucken den Absatz der Zeitschrift schädigt. Dissertationsexemplare werden von der Verlagsbuchhandlung grundsätzlich nicht geliefert.

Autorkorrekturen, d. h. nachträgliche Textänderungen werden, soweit sie 10% der Satzkosten übersteigen, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Manuskriptsendungen sind zu richten an Herrn Geh. Reg.-Rat Professor Dr. Karl Scheel, Berlin - Dahlem, Werderstraße 28.

91. Band

Inhalt

11. und 12. Heft

	Seite
Johannes Picht , Das Huygenssche Prinzip in Anwendung auf Zylinderwellen. Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 10. September 1934)	717
A. Güntherschulze , Der Ionenmanteleffekt in Gasentladungen. (Mitteilung aus dem Institut für allgemeine Elektrotechnik der Technischen Hochschule Dresden.) Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 1. September 1934)	724
W. v. Meyeren , Ein Beitrag zur elektrischen Aufzehrung von Gasen bei sehr geringen Drucken. II. Mit 12 Abbildungen. (Eingegangen am 22. August 1934)	727
Aug. Upmark , Elektrische Spitzenwirkungen bei sphärischen Leitern atomarer und subatomarer Größe. Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 27. August 1934)	737
H. Ludloff , Über eine Ableitung der Magnetisierungsfunktion von Ferromagnetika, die im ganzen Temperaturgebiet gültig ist. Mit 10 Abbildungen. (Eingegangen am 17. August 1934)	742
Gunnar Steensholt , Über die Stabilität der Ionengitter Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 3. September 1934)	765
G. Zimmermann , Erklärung des Normalgradienten Null der Edelgase durch Diffusion. (Mitteilung aus dem Institut für allgemeine Elektrotechnik der Technischen Hochschule Dresden.) (Eingegangen am 14. September 1934)	767
R. Suhrmann und A. Schallamach , Über die Temperaturabhängigkeit des Photoeffektes reiner und mit Fremdatomen besetzter Metalloberflächen bei tiefen Temperaturen. Mit 8 Abbildungen. (Eingegangen am 17. August 1934)	775
W. Scheib und K. Hedfeld , Die Rotationsschwingungsbande der Blausäure bei 10381 Å. (Eingegangen am 15. September 1934)	792
R. Döpel , Atomzertrümmerungsversuche mit H und He an leichten Elementen. Mit 5 Abbildungen. (Eingegangen am 11. September 1934)	796
G. Hertz , Ein Verfahren zur Trennung von Isotopengemischen durch Diffusion in strömendem Quecksilberdampf. Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 8. September 1934)	810
Carl Leiss , Bemerkungen über die Lichtstärke bei Spektralapparaten, Spektrographen und Monochromatoren. (Eingegangen am 23. August 1934)	816
Takesi Hayasi , Berichtigung zu der Arbeit: „Zur Theorie der Magnetostriktion.“ (Eingegangen am 6. April 1934)	818
Ludwig Baumgardt , Berichtigung zu dem Artikel: Über die Verallgemeinerung des Michelson-Versuches	819
Autorenregister	820
Titel und Inhalt zum 91. Bande.	

Das Huygenssche Prinzip in Anwendung auf Zylinderwellen.

Von **Johannes Picht** in Berlin.

Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 10. September 1934.)

Es wird gezeigt, daß man auf Zylinderwellen das Huygenssche Prinzip in *modifizierter* Form anwenden kann, d. h. daß es gestattet ist, die zylindrische Wellenfläche in zur Zylinderachse parallele Streifen von differentieller Breite zerlegt zu denken und diese Streifen als lineare Lichtquellen aufzufassen, die ihrerseits elementare Zylinderwellen aussenden, während ja das Huygenssche Prinzip eigentlich verlangt, daß von jedem Flächenelement der Wellenfläche elementare Kugelwellen ausgesandt werden.

Das Huygenssche Prinzip sagt bekanntlich aus, daß alle Flächenelemente einer beliebigen (Licht-) Wellenfläche aufgefaßt werden können als neue Lichtquellen, die untereinander kohärent sind und in gleicher Phase schwingen, und von denen sich kohärente inhomogene Kugelwellen (Elementarwellen) in den Raum hinaus ausbreiten, deren Intensität von der Richtung gegen die Normale des Wellenflächenelementes abhängt und für Richtungen, die mit der genannten Flächennormale einen Winkel $\omega \geq \pi/2$ bilden, verschwindet. In Richtung der Flächennormale ($\omega = 0$) hat die Intensität der Elementarwelle ihren größten Betrag.

Bezeichnet man daher das Flächenelement der betreffenden Wellenfläche W mit $d\sigma$ und ist r der Abstand des (durch die Wellenfläche von der Lichtquelle getrennten) Aufpunktes P , in dem wir die Lichterscheinung berechnen wollen, von dem Flächenelement $d\sigma$ der Wellenfläche, so gilt für die Lichtschwingung u_P im Aufpunkte P

$$u_P = \int_W u_W \frac{e^{-ikr}}{r} K d\sigma, \quad (1)$$

$$\left(k = \frac{2\pi}{\lambda} \right),$$

wo u_W die Lichtschwingung auf der Wellenfläche W und K ein

Faktor ist, der von dem Winkel ω gegen die Normale von $d\sigma$ abhängt und proportional zu $\cos \omega$ angenommen wird. Ist u_W für die ganze Wellen-

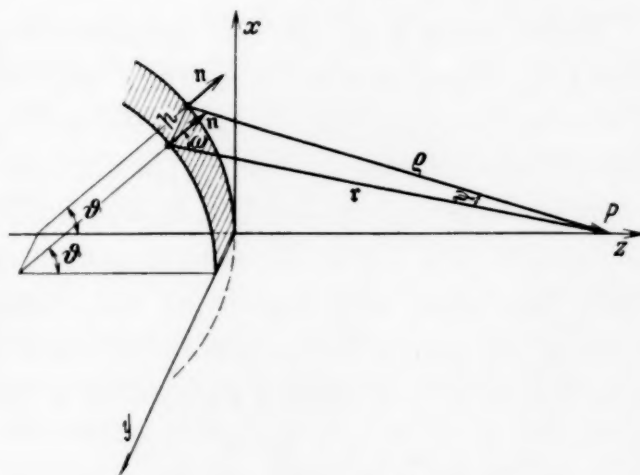


Fig. 1. Zur Wahl der Bezeichnungen.

fläche konstant (homogene Wellen), so kann es natürlich vor das Integralzeichen gesetzt (und eventuell als Proportionalitätsfaktor fortgelassen) werden.

Wendet man das Huygenssche Prinzip auf eine Zylinderwelle an — wir beschränken uns im folgenden auf Kreiszylinderwellen —, so ergibt sich, da für diese (Bezeichnungen siehe Fig. 1)

$$d\sigma = r_0 d\vartheta dh \quad \text{und} \quad u_W = \frac{e^{-ikr_0}}{\sqrt{r_0}}$$

ist¹⁾,

$$u_P = \frac{e^{-ikr_0}}{\sqrt{r_0}} r_0 \int_{-\infty}^{+\infty} dh \int_{-\arccos \frac{r_0}{b+r_0}}^{+\arccos \frac{r_0}{b+r_0}} d\vartheta K(\vartheta, h) \frac{e^{-ikr}}{r}. \quad (2)$$

Hierin ist b der Abstand des Aufpunktes P von der Wellenfläche und r_0 der Abstand der [linearen Lichtquelle²⁾ bzw. der] Brennpunktlinie der Zylinderwelle von jener Wellenfläche. Die Grenzen für ϑ ergeben sich aus der Bedingung des Huygensschen Prinzips, daß die Intensität der Elementarwellen für $\omega \geq \pi/2$ verschwindet. Ferner ist $K(\vartheta, h) \sim \cos \omega$, wo ω der Winkel zwischen der Normalen \mathbf{n} des Flächenelementes $d\sigma$ der Zylinderwellenfläche und dem Radiusvektor \mathbf{r} von $d\sigma$ nach P ist. Es ist noch

$$\mathbf{n} \equiv \{ \sin \vartheta, 0, \cos \vartheta \},$$

$$\mathbf{r} \equiv \{ -r_0 \sin \vartheta, -h, r_0 + b - r_0 \cos \vartheta \}.$$

Andererseits liegt es bei Zylinderwellen nahe, das Huygenssche Prinzip in etwas modifizierter Form anzuwenden, nämlich anzunehmen — was wohl auch schon oft geschehen ist —, daß man die (zylindrische) Wellenfläche in Elementarstreifen (parallel zur Zylinderachse) von differentieller Breite zerlegt denken und diese Elementarstreifen als lineare Lichtquellen auffassen kann, die untereinander kohärent sind und in gleicher Phase schwingen, und von denen sich kohärente inhomogene Zylinderwellen in den Raum hinaus ausbreiten, deren Intensität von der Richtung gegen die Normale des Elementarstreifens abhängt. Man kann das Problem

¹⁾ Eine Zylinderwelle läßt sich bekanntlich in größerem Abstände von der Brennpunktlinie durch den Ausdruck $e^{\pm ikr}/\sqrt{r}$ darstellen (siehe unten). — ²⁾ Die einzelnen Punkte einer linearen Lichtquelle senden inkohärente Kugelwellen aus, die durch Überlagerung keine Zylinderwelle ergeben. Man kann sich aber natürlich auf andere Weise eine Zylinderwelle herstellen.

als zweidimensionales behandeln und erhält für die Lichtbewegung u_P im Aufpunkte P

$$u_P = \frac{e^{-ikr_0}}{\sqrt{r_0}} r_0 \int_{-\arccos \frac{r_0}{b+r_0}}^{+\arccos \frac{r_0}{b+r_0}} d\vartheta K(\vartheta) \frac{e^{-ik\varrho(\vartheta)}}{\sqrt{\varrho(\vartheta)}}, \quad (3)$$

worin $K(\vartheta) \sim \cos \omega$, $\omega = \angle(\mathbf{r}, \mathbf{n})$ und $\varrho = |\mathbf{r}|$ der Abstand des Aufpunktes vom Elementarstreifen ist. Hier ist wieder

$$\mathbf{n} \equiv \{\sin \vartheta, 0, \cos \vartheta\},$$

während jetzt

$$\mathbf{r} \equiv \{-r_0 \sin \vartheta, 0, r_0 + b - r_0 \cos \vartheta\}.$$

Es ist bisher meines Wissens nicht gezeigt, ob (2) und (3) identisch sind. Zwar findet sich eine Zerlegung der Wellenfläche in Streifen bereits in älteren Arbeiten, z. B. bei Verdet-Exner¹⁾, Schuster-Konen²⁾ u. a. Jene Arbeiten beschränken sich aber darauf, zu zeigen, daß — auf unseren Fall der Zylinderwelle übertragen — sich die gesamte Wirkung der von den einzelnen Punkten (Flächenelementen) des Elementarstreifens ausgehenden Kugelwellen näherungsweise reduziert auf die Wirkung derjenigen Kugelwellen, die von einem kleinen Bezirk des Elementarstreifens ausgehen, der dem Punkt des Streifens benachbart ist, dessen Abstand vom betrachteten Aufpunkt ein Maximum oder Minimum ist. Alle diese „Bezirke“ der verschiedenen Elementarstreifen bilden ihrerseits zusammen einen (zur genannten Streifenschar senkrechten) Streifen, der den „Pol“ des Aufpunktes (in bezug auf die Wellenfläche) enthält. Die Wirkung der von den einzelnen „Bezirken“ der verschiedenen Elementarstreifen ausgehenden Kugelwellen reduziert sich näherungsweise wieder auf die vom Pol des Aufpunktes und dessen nächster Umgebung ausgehenden Kugelwellen.

Wir wollen nun sehen, ob (2) und (3) identisch sind bzw. in welcher Beziehung diese Ausdrücke zueinander stehen. Wir gehen aus von der unmittelbar aus dem Huygensschen Prinzip folgenden Gleichung (2). Bezeichnen wir — in Übereinstimmung mit der in (3) gewählten Bezeichnung — die Projektion des Vektors \mathbf{r} auf die xz -Ebene durch $\varrho = \varrho(\vartheta)$

¹⁾ Verdet-Exner, Vorlesungen über die Wellentheorie des Lichtes. Braunschweig 1881. Bd. 1, S. 135. — ²⁾ Schuster-Konen, Einführung in die theoretische Optik. Leipzig-Berlin 1907. S. 104.

und den Winkel zwischen \mathbf{r} und ϱ durch ψ , so ist, wenn wir noch $\frac{1}{\cos \psi} = \eta$ setzen,

$$\begin{aligned}\varrho &= \varrho(\vartheta) = \sqrt{r_0^2 + (b + r_0)^2 - 2r_0(b + r_0)\cos\vartheta}, \\ r &= \sqrt{\varrho^2 + h^2} = \frac{\varrho}{\cos\psi} = \varrho\eta, \\ h &= \varrho \operatorname{tg} \psi = \varrho \sqrt{\eta^2 - 1}, \\ dh &= \frac{\varrho}{\cos^2\psi} d\psi = \varrho \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - 1}} d\eta.\end{aligned}$$

Wie wir schon oben erwähnten, ist $K(\vartheta, h) \sim \cos \omega = \frac{1}{r} (\mathbf{n}, \mathbf{r})$, also

$$\begin{aligned}K(\vartheta, h) &\sim \frac{(r_0 + b) \cos \vartheta - r_0}{r} = \frac{\sqrt{\varrho^2 - (b + r_0)^2 \sin^2 \vartheta}}{\varrho \eta} \\ &= \frac{1}{\eta} \sqrt{1 - \left(\frac{b + r_0}{\varrho(\vartheta)}\right)^2 \sin^2 \vartheta}.\end{aligned}\quad (4)$$

Für $\vartheta = \arccos \frac{r_0}{b + r_0} = \hat{\vartheta}$ ist

$$\begin{aligned}\varrho^2(\hat{\vartheta}) &= (b + r_0)^2 - r_0^2, \\ \sin^2 \hat{\vartheta} &= \frac{(b + r_0)^2 - r_0^2}{(b + r_0)^2} = \left(\frac{\varrho(\hat{\vartheta})}{b + r_0}\right)^2,\end{aligned}$$

also $K(\hat{\vartheta}, h) = 0$.

Führen wir diese Größen in (2) ein, so erhalten wir nach einigen Vereinfachungen

$$\begin{aligned}u_P &= 2\sqrt{r_0} e^{-ikr_0} \int_{-\hat{\vartheta}}^{+\hat{\vartheta}} \left\{ \int_0^{\pi/2} e^{-ik \frac{\varrho(\vartheta)}{\cos \psi}} d\psi \right\} \sqrt{1 - \left(\frac{b + r_0}{\varrho(\vartheta)}\right)^2 \sin^2 \vartheta} d\vartheta \quad (5^*) \\ &= 2\sqrt{r_0} e^{-ikr_0} \int_{-\hat{\vartheta}}^{+\hat{\vartheta}} \left\{ \int_1^\infty \frac{e^{-ik\eta\varrho(\vartheta)}}{\eta \sqrt{\eta^2 - 1}} d\eta \right\} \sqrt{1 - \left(\frac{b + r_0}{\varrho(\vartheta)}\right)^2 \sin^2 \vartheta} d\vartheta.\end{aligned}\quad (5)$$

Wir betrachten zunächst nur die $\{ \}$ und setzen hier $\eta = \operatorname{Cof} \alpha$, dann ist

$$\{ \} = \int_0^\infty \frac{e^{-ik\varrho \operatorname{Cof} \alpha}}{\operatorname{Cof} \alpha} d\alpha.$$

Wir differenzieren und integrieren nach k und erhalten

$$\{ \} = -i\varrho \int_c^k \int_0^\infty e^{-iz\varrho \operatorname{Cof} \alpha} d\alpha dz = i\varrho \int_k^c Z_0(z\varrho) dz, \quad (6)$$

wo C eine noch zu bestimmende Konstante und $Z_0(\kappa \varrho)$ bis auf den Zahlenfaktor $2/\pi i$ die sogenannte Hankelsche Funktion zweiter Art nullter Ordnung $H_0^{(2)}(\kappa \varrho)$ ist. Es ist also

$$Z_0(\kappa \varrho) = -i \frac{\pi}{2} H_0^{(2)}(\kappa \varrho). \quad (7)$$

Um den Wert der bei der Differentiation fortgefallenen und bei der Integration wieder auftretenden Konstanten C zu bestimmen, beachten wir, daß sich für den speziellen Wert $\varrho = 0$ das Integral der $\{ \}$ ohne den Umweg über die Differentiation auswerten läßt. Es ist

$$\left(\int_0^\infty \frac{e^{-ik\varrho \cos \alpha}}{\cos \alpha} d\alpha \right)_{\varrho=0} = \left(\int_0^{\pi/2} e^{-ik \frac{\varrho}{\cos \psi}} d\psi \right)_{\varrho=0} = \int_0^{\pi/2} d\psi = \frac{\pi}{2}.$$

Es muß also die Konstante C in (6) so gewählt werden, daß

$$\lim_{\varrho=0} \left(i \varrho \int_k^C Z_0(\kappa \varrho) d\kappa \right) = \lim_{\kappa \varrho=0} \left(i \int_{k \varrho}^{C \varrho} Z_0(\xi) d\xi \right) = \frac{\pi}{2} \text{ ist.}$$

Nun ist nach Nielsen¹⁾

$$\int_0^\infty H_0^{(2)}(\xi) d\xi = 1$$

also wegen (7):

$$i \int_0^\infty Z_0(\xi) d\xi = \frac{\pi}{2}.$$

Hieraus folgt, daß wir $C = +\infty$ zu setzen haben, so daß

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ik\varrho \cos \alpha}}{\cos \alpha} d\alpha = i \varrho \int_k^\infty Z_0(\kappa \varrho) d\kappa. \quad (8)$$

Für große Werte von $\kappa \varrho$ — und um solche handelt es sich bei den angegebenen Grenzen ja immer, da k sehr groß ist und bei der Anwendung des Huygensschen Prinzips auch ϱ stets groß ist — wird

$$Z_0(\kappa \varrho) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2\kappa \varrho}} e^{-i \left(\kappa \varrho + \frac{\pi}{4} \right)},$$

so daß für große Werte von $\kappa \varrho$, da noch $i = e^{i \frac{\pi}{2}}$ ist,

$$\{ \} = \int_0^\infty \frac{e^{-ik\varrho \cos \alpha}}{\cos \alpha} d\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \varrho e^{i \frac{\pi}{4}} \int_k^\infty \frac{e^{-i\kappa \varrho}}{\sqrt{\kappa \varrho}} d\kappa. \quad (9)$$

¹⁾ N. Nielsen, Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen. Leipzig 1904.

Es ist demnach

$$u_P = \sqrt{2\pi r_0} e^{-i(kr_0 - \frac{\pi}{4})} \int_{-\hat{\vartheta}}^{+\hat{\vartheta}} d\vartheta \int_k^\infty dz \frac{e^{-iz\varrho(\vartheta)}}{\sqrt{z\varrho(\vartheta)}} \sqrt{\varrho^2(\vartheta) - (b+r_0)^2 \sin^2 \vartheta} \quad (10)$$

$$= \sqrt{2\pi r_0} e^{-i(kr_0 - \frac{\pi}{4})} \int_{-\hat{\vartheta}}^{+\hat{\vartheta}} d\vartheta \int_k^\infty dz \frac{e^{-iz\varrho(\vartheta)}}{\sqrt{z\varrho(\vartheta)}} \{(b+r_0) \cos \vartheta - r_0\}. \quad (10^*)$$

Wir setzen

$$\sqrt{z\varrho(\vartheta)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} u; \quad dz = \frac{\pi}{\varrho} u du.$$

Dann wird

$$\int_k^\infty \frac{e^{-iz\varrho}}{\sqrt{z\varrho}} dz = \frac{1}{\varrho} \sqrt{2\pi} \int_{\sqrt{\frac{2}{\pi} k \varrho}}^\infty e^{-i\frac{\pi}{2} u^2} du$$

$$= \frac{1}{\varrho} \sqrt{2\pi} \left\{ \left[C(\infty) - C\left(\sqrt{\frac{2}{\pi} k \varrho}\right) \right] - i \left[S(\infty) - S\left(\sqrt{\frac{2}{\pi} k \varrho}\right) \right] \right\},$$

wo $C(u)$ und $S(u)$ die Fresnelschen Integrale sind. Für große Werte von u — und um solche handelt es sich ja hier — ist

$$C(\infty) - C(u) = + \frac{1}{\pi u} \sin \frac{\pi}{2} u^2,$$

$$S(\infty) - S(u) = - \frac{1}{\pi u} \cos \frac{\pi}{2} u^2,$$

so daß

$$\int_k^\infty \frac{e^{-iz\varrho}}{\sqrt{z\varrho}} dz = - \frac{i}{\varrho} \frac{1}{\sqrt{k\varrho}} e^{-ik\varrho}.$$

Wir erhalten also wegen $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ und wegen (4)

$$u_P = \sqrt{2\pi r_0} e^{-i(kr_0 + \frac{\pi}{4})} \int_{-\hat{\vartheta}}^{+\hat{\vartheta}} \frac{e^{-ik\varrho(\vartheta)}}{\sqrt{k\varrho(\vartheta)}} \sqrt{1 - \left(\frac{b+r_0}{\varrho(\vartheta)}\right)^2 \sin^2 \vartheta} d\vartheta$$

$$= \sqrt{\lambda} e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-ikr_0}}{\sqrt{r_0}} r_0 \int_{-\arccos \frac{r_0}{b+r_0}}^{+\arccos \frac{r_0}{b+r_0}} d\vartheta K(\vartheta, h)_{h=0} \frac{e^{-ik\varrho(\vartheta)}}{\sqrt{\varrho(\vartheta)}}, \quad (11)$$

wo noch $K(\vartheta, h)_{h=0} = K(\vartheta)$. Wir erhalten also, abgesehen von dem konstanten Faktor $\sqrt{\lambda} e^{-i\frac{\pi}{4}}$, völlige Übereinstimmung mit (3), wodurch die Anwendung des Huygensschen Prinzips in der modifizierten Form als berechtigt erwiesen ist.

Beachtet man noch, daß man bei Anwendung des Huygensschen Prinzips in seiner eigentlichen Form dem Faktor K den Wert

$$K_K = \frac{i}{\lambda} \cos \omega = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{\lambda} \cos \omega \quad (12)$$

geben muß, um Übereinstimmung mit dem Experiment und mit Folgerungen aus der Kirchhoffschen Formel zu erhalten, so folgt aus (11), daß bei Anwendung des Huygensschen Prinzips in der modifizierten Form der Faktor K den Wert

$$K_Z = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\lambda}} \cos \omega \quad (12^*)$$

hat, was physikalisch sehr plausibel und bei Zylinderwellen von vornherein zu erwarten ist.

Berlin, Lehrstuhl für theoretische Optik an der Technischen Hochschule Berlin, im September 1934.

(Mitteilung aus dem Institut für allgemeine Elektrotechnik
der Technischen Hochschule Dresden.)

Der Ionenmanteleffekt in Gasentladungen.

Von A. Güntherschulze in Dresden.

Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 1. September 1934.)

Die Tatsache, daß in Molekülgasen die Elektronen um so stärker an neutrale Moleküle angelagert werden und negative Ionen bilden, je geringer ihre Geschwindigkeit ist, führt zur Ausbildung eines Mantels negativer Raumladung um jede Gasentladung, der die Entladung auch in weiten Gefäßen und bei geringen Drucken zu einem mehr oder weniger engen Schlauch zusammendrängt. Dadurch unterscheidet sich die Strömung in Molekülgasen grundsätzlich von der in Edelgasen, in denen diese Erscheinung vollkommen fehlt.

In dem kugelförmigen Gefäß der Fig. 1 sei A irgendeine Elektronenquelle (Glimm- oder Glühkathode), B die Anode. Das Gefäß sei mit einem Gas von so geringem Druck gefüllt, daß eine Aufheizung des Gases durch den Strom noch keine Rolle spielt. Die elektrostatischen Feldlinien zwischen A und B sind punktiert in die Fig. 1 eingezeichnet.

Untersucht werden die Folgen der Tatsache, daß die Elektronen in manchen Gasen um so stärker an die neutralen Moleküle angelagert werden und dadurch negative Ionen bilden, je geringer ihre Geschwindigkeit ist,

wobei die gesetzmäßige Form dieses Zusammenhangs von der Gasart abhängt.

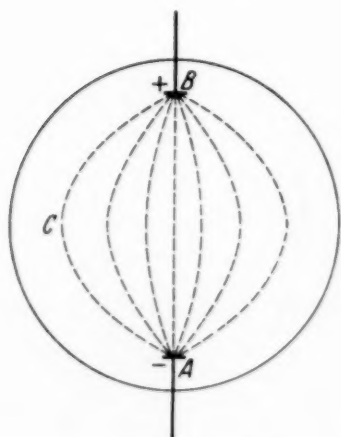


Fig. 1.

Nun folgen bei der Strömung durch das Gas die positiven Ionen im wesentlichen den Feldlinien, da sie bei jedem Stoß gegen Moleküle im Mittel die Hälfte ihrer Energie verlieren, so daß sie keine merkliche von der Feldlinienrichtung abweichende Geschwindigkeit über mehrere Stöße hinaus speichern können. Die Elektronen aber werden gezwungen, sich dem Wege der positiven Ionen anzupassen, da sonst Raumladungen auftreten, die sie zu den positiven

Ionen zurückziehen. Also folgen auch die Elektronen im wesentlichen den Feldlinien. Immerhin würde die Diffusion zu einer gewissen Abweichung führen, die die Strömung innen etwas verringert, außen etwas vergrößert.

Weiter ist aber der Umweg von A über C nach B wesentlich länger als der direkte Weg AB , die mittlere Feldstärke und damit die mittlere Elektronengeschwindigkeit auf diesem Umwege entsprechend geringer. Also wird infolge der oben erwähnten Elektronenanlagerung die Zahl der gebildeten negativen Ionen auf dem Umwege ACB wesentlich größer sein, als auf dem direkten Wege AB . Die Wanderungsgeschwindigkeit der negativen Ionen ist aber außerordentlich viel geringer als die der Elektronen. Das hat zwei Folgen. Erstens wird dadurch die Stromstärke auf dem Wege ACB viel geringer, als sie es ohne Ionenbildung wäre, zweitens reichern sich die negativen Ionen wegen ihrer geringen Geschwindigkeit auf dem Wege ACB stark an und bilden dadurch eine kräftige negative Raumladung, die ihrerseits nochmals die Stromstärke auf diesem Wege herunterdrückt. So zeigt sich, daß sich die Strömung mit einem Mantel negativer Raumladung umgibt, die die Strömung von A nach B zu einem mehr oder weniger engen Schlauch zusammendrängt.

Auch ein die positive Säule umhüllendes Glasrohr ist der Sitz einer negativen Ladung. Von dieser unterscheidet sich die hier behandelte, ohne Mitwirkung der Gefäßwände zustande kommende dadurch, daß sie nicht flächenhaft, sondern räumlich verteilt ist und einen mehr oder weniger dicken lockeren Mantel bildet. Aber ebenso wie jene bremst sie alle durch Querdiffusion sich ihr nähernden Elektronen und begünstigt damit auch ihre Umwandlung in negative Ionen, womit sie sich bis zu einem gewissen Grade weiter verstärkt.

Außer der Zusammendrängung der Strömung zu einem Schlauch hat dieser Mantel weiter die Wirkung, positive Ionen aus der Entladung anzusaugen und durch Wiedervereinigung mit den negativen Ionen zu neutralisieren. Dadurch wird der Gradient der Entladung ohne Mitwirkung der Gefäßwände über den Betrag hinaus erhöht, den er ohne diesen Effekt hätte.

Diesen Effekt möchte ich den „Ionenmanteleffekt“ nennen. Offenbar hängt seine Größe ab 1. von der Stromstärke, 2. vom Gasdruck, 3. von der Gasart. Bei größeren Gasdrucken tritt zu ihm der Temperaturmanteleffekt hinzu, der infolge der Aufheizung des Gases ebenfalls zu einer Schlauchbildung führt.

Was den letzten Punkt anlangt, so fehlt der Ionenmanteleffekt bei reinen Edelgasen vollkommen, weil sich bei ihnen überhaupt keine negativen Ionen bilden. Bei trockenem Stickstoff und Wasserstoff ist er mäßig, aber durchaus charakteristisch ausgeprägt. Er steigt über Sauerstoff und Wasserstoff zu den halogenen Gasen, bei denen er so stark ist, daß

die Entladung in einem weiten Gefäß schon bei geringen Drucken in einem ganz engen leuchtenden Schlauch verläuft.

Dieser Ionenmanteleffekt ist demnach die Ursache des prinzipiellen Unterschiedes im Strömungsmechanismus zwischen Edelgasen und Molekulgasen, wobei zu den Edelgasen wohl die Metaldämpfe zu rechnen sind. Mit Hilfe dieses Effektes läßt sich eine ganze Anzahl bisher unerklärter Erscheinungen der Gasentladungen deuten. Um nur ein Beispiel zu nennen: die negative Ladung der Rohrwände einer positiven Säule bremst die Elektronen. Also entstehen in Molekulgasen schon vor der Rohrwand negative Ionen und bilden eine negative Raumladung. Diese schirmt die Rohrwand zum Teil ab und hat zur Folge, daß diese viel weniger wirkt als bei Edelgasen, wo dieser Effekt fehlt. Deshalb gilt für den Gradienten der positiven Säule der Edelgase innerhalb gewisser durchaus plausibler Grenzen¹⁾:

$$U = \frac{C}{r},$$

in Molekulgasen dagegen:

$$U = \frac{C p^{2/3}}{r^{1/3}}.$$

Hier wirkt der Radius des Rohres also aus den angegebenen Gründen nur mit der dritten Wurzel.

Die Beziehung dieses Ionenmanteleffektes zu einer Anzahl verschiedener Erscheinungen der Gasentladung wird zur Zeit in meinem Institut experimentell durch verschiedene Mitarbeiter untersucht. Ich möchte ihren Ergebnissen hier nicht vorgreifen.

¹⁾ A. Güntherschulze, ZS. f. Phys. 41, 718, 1927.

Ein Beitrag zur elektrischen Aufzehrung von Gasen bei sehr geringen Drucken. II.

Von W. v. Meyeren in Karlsruhe.

Mit 12 Abbildungen. (Eingegangen am 22. August 1934.)

Es werden Versuche über die elektrische Aufzehrung von Helium, Argon und Stickstoff im Druckgebiet von $5 \cdot 10^{-4}$ bis $1 \cdot 10^{-7}$ mm Hg mitgeteilt. Die Aufzehrung erfolgt in einer früher beschriebenen Glühkathodenröhre mit Ringanode und longitudinale Magnetfeld. Der Aufzehrungsprozeß läßt sich in einem größeren Druckbereich unter besonderen Bedingungen durch eine einfache Exponentialfunktion darstellen. In einer Apparatur von 2,05 Liter kann der Druck von Stickstoff in kurzer Zeit von $1 \cdot 10^{-4}$ mm Hg auf $6 \cdot 10^{-7}$ mm Hg herabgesetzt werden.

1. Einleitung. Eine frühere Arbeit in dieser Zeitschrift¹⁾ behandelte Versuche über die elektrische Aufzehrung von Luft und Wasserstoff in einer Glühkathodenröhre besonderer Konstruktion. Zur Erzielung einer starken Gasionisation durch Elektronenstoß war die Anode als Ring ausgebildet. Unter dem Einfluß negativer Wandladungen wurde ein Teil der Elektronen gezwungen, durch den Anodenring mehrere Male hin und her zu laufen (Pendelelektronen). Außerdem befand sich bei vielen Versuchen das Rohr in einem longitudinalen Magnetfeld, welches eine hohe Elektronendichte längs der Achse des Entladungsrohres bewirkte, verbunden mit sehr großen, freien Wegstrecken der Elektronen. Hierdurch findet selbst bei sehr niedrigen Gasdrucken noch eine kräftige Stoßionisation, verbunden mit einer intensiven Gasaufzehrung statt.

Die in I. mitgeteilten Versuche wurden auf drei weitere Gase ausgedehnt, auf Helium, Argon und Stickstoff²⁾. Die Versuchsanordnung war die gleiche, wie die in I. beschriebene. Sie wurde lediglich insofern verbessert, als stets für eine genaue Justierung des Magnetfeldes parallel zur Achse des Elektronenrohres gesorgt wurde. Ferner wurde die Genauigkeit der Druckmessung mit dem Ionisationsmanometer (Telefunken RE 11) erhöht. Der niedrigste, noch genau meßbare Gasdruck betrug:

für Helium:	$2,0 \cdot 10^{-6}$ mm Hg,
für Argon:	$3,0 \cdot 10^{-7}$ „ „ ,
für Stickstoff:	$2,5 \cdot 10^{-7}$ „ „ .

¹⁾ W. v. Meyeren, ZS. f. Phys. **84**, 531, 1933; im folgenden stets als I. bezeichnet. — ²⁾ Die benutzten Gase Helium und Argon wurden von der Gesellschaft für Lindes Eismaschinen freundlichst zur Verfügung gestellt, wofür an dieser Stelle nochmals gedankt sei. Die Verunreinigungen betrugen weniger als $5^0/_{00}$. Der Stickstoff wurde aus reinstem Natriumnitrit hergestellt, sehr sorgfältig gereinigt und mit flüssiger Luft getrocknet.

Auch erwies es sich bei der stark erhöhten Meßgenauigkeit als notwendig, vor jedem Aufzehrungsversuch das Entladungsrohr sehr sorgfältig von adsorbierten Gasresten zu befreien. Dies wurde durch kräftiges Ausheizen im elektrischen Ofen erreicht. Das Rohr wurde etwa eine Stunde lang auf 360°C erhitzt, darauf die Temperatur für kurze Zeit auf 400°C erhöht und dann langsam auf Zimmertemperatur (25°C) abgekühlt.

In I.¹⁾ wurde ferner beschrieben, daß der Elektronenstrom, und damit auch die Stoßionisation, während des Aufzehrungsprozesses allmählich abnahm. Der Grund hierfür war das Anwachsen der negativen Raumladung bei abnehmendem Druck. Wie bei den früheren Versuchen wurde deshalb auch bei allen im folgenden mitgeteilten der Heizstrom der Glühkathode sorgfältig konstant gehalten. Er betrug stets 1,400 Amp.

Das Volumen der ganzen mit dem Elektronenrohr verbundenen Apparatur betrug 2,05 Liter.

2. *Allgemeine Versuchsergebnisse.* Fig. 1 zeigt den Verlauf der Aufzehrung für die drei Gase. Es ist der Gasdruck (in logarithmischem Maßstab) als Funktion der Zeit aufgetragen. Zur Zeit 0 wurde der Heizstrom der Glühkathode eingeschaltet. Die Spannung zwischen Anode und Kathode betrug immer 800 Volt, der Anfangsdruck $1,0 \cdot 10^{-4}$ mm Hg. Bei den Versuchen mit Argon und Stickstoff wurde einmal die Aufzehrung ohne Verwendung des Magnetfeldes gemessen (Kurve 2 bzw. 4), das andere Mal unter dem Einfluß eines Feldes von 240 Gauß²⁾ (Kurve 3 bzw. 5). Kurve 1 zeigt die Aufzehrung von Helium bei einer Feldstärke von 240 Gauß. Ohne Magnetfeld konnte für Helium bei einem Anfangsdruck von $1,0 \cdot 10^{-4}$ mm Hg eine meßbare Aufzehrung überhaupt nicht festgestellt werden.

3. *Verbleib des aufgezehrten Gases.* Wurde bei der Aufzehrung von Argon und Stickstoff mit Magnetfeld die Elektronenemission plötzlich unterbrochen, so blieb die Druckerniedrigung bestehen, wie es auch bei den Versuchen in I. der Fall war. Wurde jedoch nach erfolgter Aufzehrung das Magnetfeld fortgenommen, die Emission jedoch nicht, so kam das aufgezehrte Gas teilweise wieder zum Vorschein. Denn die Elektronen trafen jetzt auf die Glaswand und befreiten das adsorbierte Gas durch Stoß. Dies zeigt Fig. 2 für Argon. Kurve 1 zeigt die Aufzehrung ohne Magnetfeld, Kurve 2 die Aufzehrung bei einem Felde von 240 Gauß. Nach 30 Minuten wurde das Magnetfeld fortgenommen. Der Gasdruck stieg sofort wieder

¹⁾ Vgl. I., S. 538. — ²⁾ Die Angaben der magnetischen Feldstärke beziehen sich immer auf den homogenen Teil des Spulenfeldes.

an, wie es Kurve 3 zeigt, und strebt dem gleichen Grenzwert zu, wie die Kurve 1.

Neben der Erhöhung der Stoßionisation und einer damit verbundenen Steigerung der Gasadsorption verhindert das Magnetfeld also die Befreiung bereits adsorbierten Gases durch Elektronenbombardement.

Wurde nach der Aufzehrung von Helium das Magnetfeld plötzlich abgeschaltet, so kam die gesamte adsorbierte Gasmenge in weniger als einer halben Minute wieder zum Vorschein.

Bei den Versuchen mit Argon und Stickstoff konnte der Teil des Gases, der auch ohne Magnetfeld aufgezehrt wird, nur durch längeres Elektronenbombardement und unter gleichzeitigem Abpumpen der befreiten Gase wieder

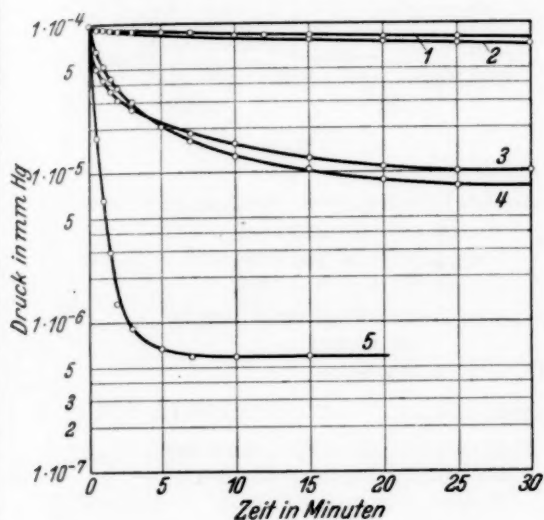


Fig. 1.

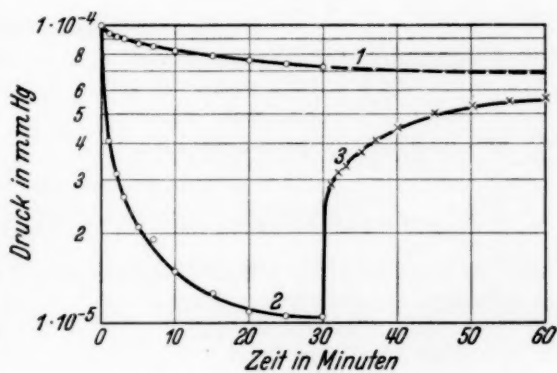


Fig. 2.

Fig. 1. Aufzehrung von Helium, Argon und Stickstoff.

Kurve 1: Helium mit Magnetfeld (240 Gauß). Kurve 2: Argon ohne Magnetfeld. Kurve 3: Argon mit Magnetfeld (240 Gauß). Kurve 4: Stickstoff ohne Magnetfeld. Kurve 5: Stickstoff mit Magnetfeld (240 Gauß). Die Anodenspannung betrug stets 800 Volt. Es ist der Druck (log) als Funktion der Zeit aufgetragen.

Fig. 2. Aufzehrung und Wiedergabe von Argon.

Kurve 1: Aufzehrung ohne Magnetfeld. Kurve 2: Aufzehrung mit Magnetfeld (240 Gauß); nach 30 Minuten wurde das Magnetfeld abgeschaltet. Hierdurch ergab sich Kurve 3: Wiedergabe des aufgezehrten Gases. Die Anodenspannung betrug stets 800 Volt. Es ist der Druck (log) als Funktion der Zeit aufgetragen.

zurückgewonnen werden, und zwar um so vollständiger, je schneller die Pumpe saugte, so daß der Gasdruck trotz der Gasbefreiung immer möglichst niedrig blieb. Ganz sicher gelang die vollständige Entgasung nur durch kräftiges Ausheizen des Entladungsrohres bei ständigem Abpumpen. Dies gilt vornehmlich für die Aufzehrung von Argon. Bei allen Versuchen mit diesem Gas wurde gefunden, daß die Adsorptionsfähigkeit des Elektronenrohres schnell abnahm, wenn nicht nach jedem Aufzehrungsversuch sehr gründlich ausgeheizt wurde. Erst nach dem Ausheizen ist die frühere Adsorptionsfähigkeit wieder hergestellt.

Diese Ermüdungserscheinung ist bei Stickstoff weniger ausgeprägt, am wenigsten bei Helium.

Diese Beobachtungen sprechen dafür, daß die Adsorption in Glühkathodenröhren bei sehr niedrigen Drucken (und ohne Verwendung von Gettersubstanzen) auf der Glaswand stattfindet und nicht durch chemische

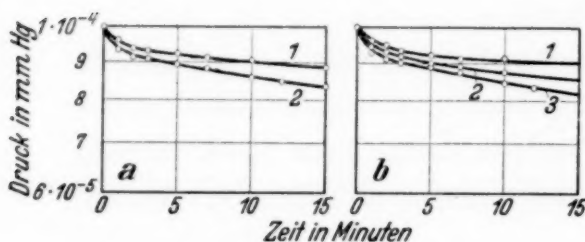


Fig. 3.

Fig. 3. Aufzehrung von Helium.

a) Abhängigkeit vom Magnetfeld.

Kurve 1: $\mathcal{H} = 173$ Gauß.

Kurve 2: $\mathcal{H} = 240$ Gauß.

Die Anodenspannung betrug 800 Volt.

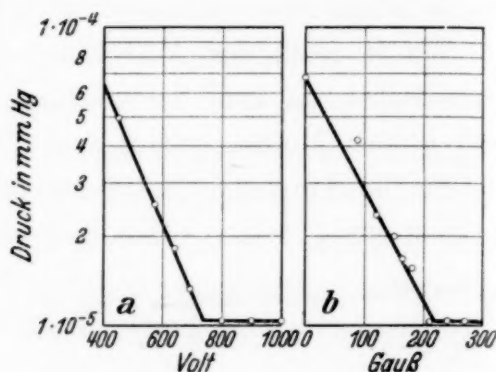


Fig. 4.

b) Abhängigkeit von der Spannung.

Kurve 1: $V = 610$ Volt.

Kurve 2: $V = 700$ Volt.

Kurve 3: $V = 800$ Volt.

Die magnetische Feldstärke betrug 240 Gauß.

Es ist der Druck (log) als Funktion der Zeit aufgetragen.

Fig. 4. Aufzehrung von Argon.

a) Abhängigkeit des Grenzvakuums von der Anodenspannung.

Magnetfeld: 240 Gauß.

b) Abhängigkeit des Grenzvakuums von der magnetischen Feldstärke.

Anodenspannung: 800 Volt.

Bindung erfolgt, zumal eine solche bei Edelgasatomen sehr unwahrscheinlich ist. Die Gasbefreiung durch Elektronenbombardement läßt auf keine sehr feste Bindung schließen, so daß auch ein tieferes Eindringen des Gases in die Glasoberfläche nicht angenommen werden kann. Am zutreffendsten ist wohl die Vorstellung einer Bindung durch die unbetätigten Oberflächenvalenzen im Sinne Langmuirs¹⁾.

4. Abhängigkeit der Gasaufzehrung von der Anodenspannung und vom Magnetfeld. Wie in I. für Luft und Wasserstoff, so wurde auch für Helium, Argon und Stickstoff die Abhängigkeit der Adsorption von der Anodenspannung und von der magnetischen Feldstärke bestimmt. Die Ergebnisse sind in den Fig. 3 bis 5 dargestellt. Für Helium (Fig. 3) besteht nur eine geringe derartige Abhängigkeit, da die Aufzehrung im Vergleich zu Argon und Stickstoff an sich schon klein ist.

Für Argon und Stickstoff sind die Ergebnisse im wesentlichen die gleichen, wie sie für Luft und Wasserstoff in I. mitgeteilt wurden. Bei Stickstoff (Fig. 5) ist die sehr geringe Spannungsabhängigkeit bemerkenswert.

¹⁾ I. Langmuir, Phys. Rev. 6, 79, 1915.

Das Grenzvakuuum wird um so schneller erreicht, je höher Anodenspannung und magnetische Feldstärke sind. Fig. 6 läßt diesen Befund

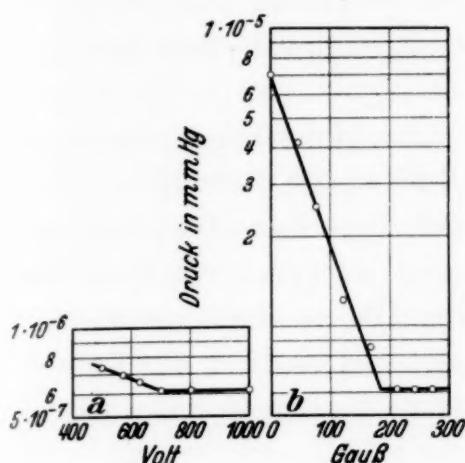


Fig. 5.

Fig. 5. Aufzehrung von Stickstoff.

a) Abhängigkeit des Grenzvakuums von der Anodenspannung.
Magnetfeld: 240 Gauß.

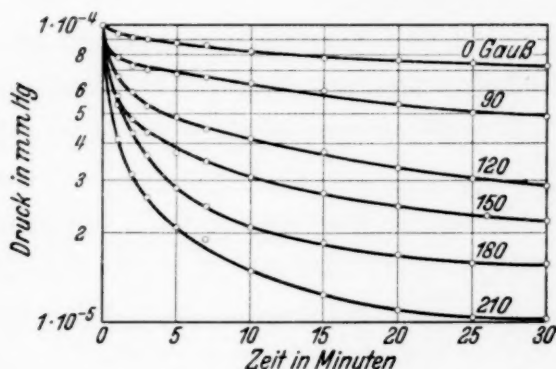


Fig. 6.

b) Abhängigkeit des Grenzvakuums von der magnetischen Feldstärke.
Anodenspannung: 800 Volt.

Fig. 6. Aufzehrung von Argon als Funktion der magnetischen Feldstärke bei konstanter Anodenspannung (800 Volt).

Es ist der Druck (log) als Funktion der Zeit aufgetragen.

für die Aufzehrung von Argon erkennen. Die Anodenspannung betrug hier immer 800 Volt, die magnetische Feldstärke dagegen wurde schrittweise geändert.

5. *Adsorptionsgleichung.* Der Verlauf der Adsorptionskurven läßt erkennen, daß bei jedem Aufzehrungsvorgang der Gasdruck einem bestimmten Grenzwert zustrebt. Es liegt deshalb nahe, den Aufzehrungsvorgang durch folgende Differentialgleichung zu beschreiben:

$$\frac{d(p - p_g)}{dt} = -K \cdot (p - p_g).$$

Für den Druck p zu einer bestimmten Zeit t folgt hieraus die Exponentialfunktion:

$$p = p_g + (p_a - p_g) \cdot e^{-K \cdot t} \quad (1)$$

(p_a Anfangsdruck, p_g Grenzdruck, e Basis der nat. Logarithmen, K Adsorptionskonstante). Die Adsorptionskurven von Helium befolgen sehr gut das durch Gleichung (1) dargestellte Gesetz. Fig. 7 zeigt eine solche Kurvenschar für den Druckbereich von $5 \cdot 10^{-4}$ bis $1 \cdot 10^{-4}$ mm Hg. Die ausgezogenen Kurven sind nach Gleichung (1) berechnet. Die gemessenen Druckwerte sind eingetragen. Bei allen Versuchen betrug die Anodenspannung 800 Volt, die magnetische Feldstärke 240 Gauß. Die Adsorptionskonstante K betrug für alle Kurven $0,15 \text{ sec}^{-1}$.

Es ergab sich, daß in dem untersuchten Druckbereich die Größe K nur von den elektrischen und magnetischen Bedingungen abhängt. So ist in Fig. 3a für 800 Volt und 173 Gauß $K = 0,20 \text{ sec}^{-1}$, in Fig. 3b für 610 Volt und 240 Gauß $K = 0,325 \text{ sec}^{-1}$, für 700 Volt und 240 Gauß $K = 0,24 \text{ sec}^{-1}$.

Bei den Versuchen mit Argon ist der Adsorptionsverlauf nur bei der Aufzehrung ohne Magnetfeld durch die Gleichung (1) darstellbar. Auch

hier gilt diese Darstellung recht befriedigend in einem größeren Druckbereich. Die in Fig. 8 dargestellten Kurven sind mit $K = 0,075 \text{ sec}^{-1}$ berechnet. Zu Beginn verlief die Aufzehrung jedoch schneller, als es das

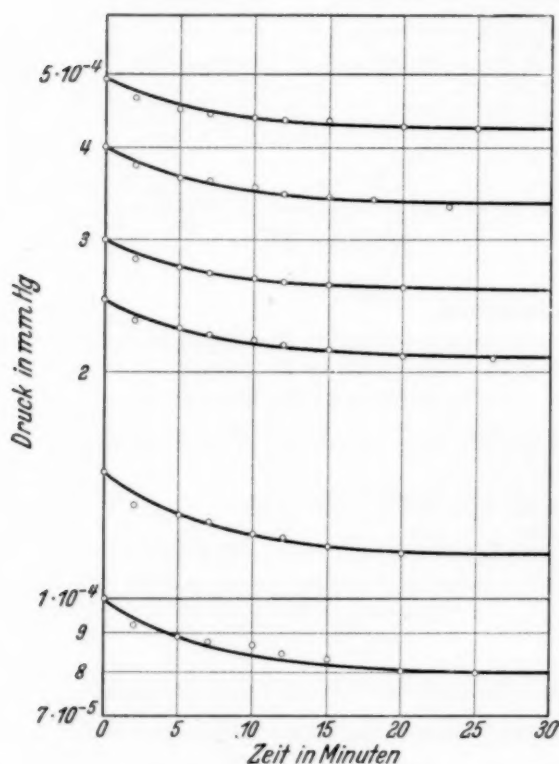


Fig. 7.

Fig. 7. Aufzehrung von Helium mit Magnetfeld (240 Gauß) bei verschiedenen Anfangsdrucken. Die Anodenspannung betrug stets 800 Volt. Es ist der Druck (log) als Funktion der Zeit aufgetragen.

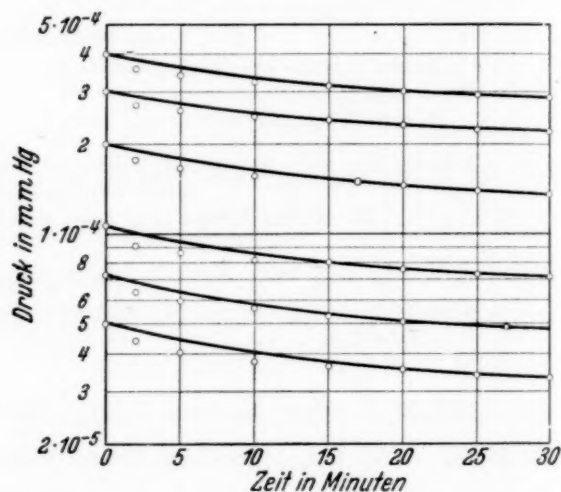


Fig. 8.

Fig. 8. Aufzehrung von Argon ohne Magnetfeld bei verschiedenen Anfangsdrucken. Die Anodenspannung betrug stets 800 Volt. Es ist der Druck (log) als Funktion der Zeit aufgetragen.

Exponentialgesetz angibt, da kurz nach dem Einschalten des Kathodenheizstromes eine mehr oder weniger lange Zeit verging, bis sich der Elektronenstrom auf einen konstanten Wert einstellte.

In Fig. 9 ist die Aufzehrung von Argon unter Benutzung eines Magnetfeldes von 240 Gauß bei verschiedenen Anfangsdrucken dargestellt. Diese Adsorptionskurven lassen sich nicht durch eine Exponentialfunktion von der Form der Gleichung (1) darstellen, da die elektrischen Verhältnisse bei der Aufzehrung nicht konstant blieben. Bei konstanter Anodenspannung, konstantem Magnetfeld und Heizstrom änderte sich der Elektronenstrom

ständig mit der Druckabnahme, und zwar nahm er in der gleichen Weise ab, wie es in I., Fig. 9, gezeigt wurde.

Die Druckabnahme war bei der Aufzehrung von Argon mit Magnetfeld so erheblich, daß infolge der Verringerung der durch Stoß gebildeten positiven Ionen eine Vergrößerung der Raumladung im Elektronenrohr und damit eine Abnahme des Elektronenstromes erfolgte.

Die Aufzehrung von Stickstoff läßt sich sowohl ohne, als auch mit Benutzung des Magnetfeldes nicht durch eine einfache Exponentialfunktion darstellen (Fig. 10 und 11).

Die Druckabnahme ist hier so erheblich, daß Drucke von der Größenordnung $1 \cdot 10^{-7}$ mm Hg leicht zu erreichen sind. Schon bei der Adsorption

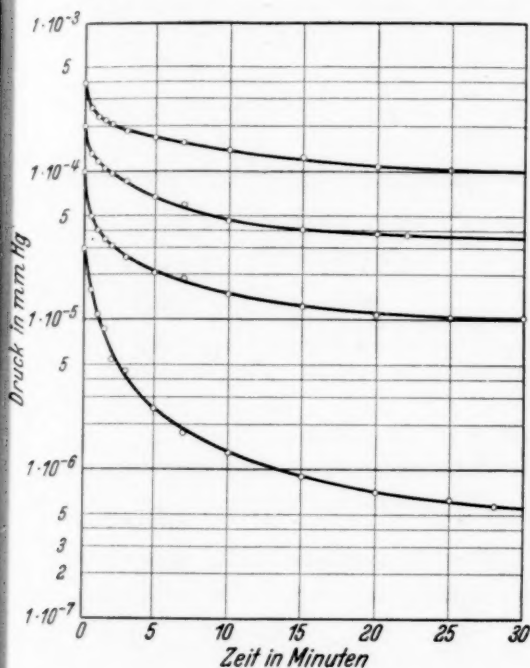


Fig. 9.

Fig. 9. Aufzehrung von Argon mit Magnetfeld (240 Gauß) bei verschiedenen Anfangsdrucken. Die Anodenspannung betrug stets 800 Volt. Es ist der Druck (log) als Funktion der Zeit aufgetragen.

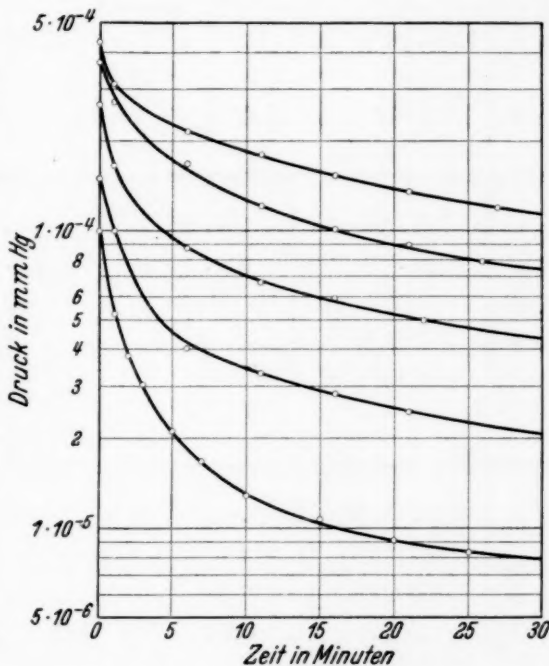


Fig. 10.

Fig. 10. Aufzehrung von Stickstoff ohne Magnetfeld bei verschiedenen Anfangsdrucken. Die Anodenspannung betrug stets 800 Volt. Es ist der Druck (log) als Funktion der Zeit aufgetragen.

ohne Magnetfeld sinkt der Druck so stark, daß der Elektronenstrom bei konstanter Spannung und konstantem Heizstrom unter starken Schwankungen auf etwa die Hälfte abnimmt. Bei Benutzung eines Magnetfeldes von 240 Gauß wird der Elektronenstrom bei Drucken unter $1 \cdot 10^{-6}$ mm Hg kleiner als $2 \cdot 10^{-5}$ Amp. Die Elektronenströme betrugen bei einem Druck von $1 \cdot 10^{-4}$ mm Hg etwa $2,5 \cdot 10^{-3}$ Amp.

6. Grad der Aufzehrung. Wie die Adsorptionskurven zeigen, sind die Beträge der Aufzehrung für die verschiedenen Gase unter sonst gleichen Be-

dingungen sehr verschieden. Aus den oben mitgeteilten Versuchen wurden die in Tabelle 1 angeführten Größen berechnet. Zu Anfang sind die Versuche ohne Magnetfeld ausgewertet, darunter die Versuche, die bei einer Feldstärke von 240 Gauß ausgeführt wurden.

Tabelle 1.

p_a Anfangsdruck, p_g Grenzdruck, N Betrag des aufgezehrten Gases in $\frac{\%}{0}$
 F Betrag der mit Gas bedeckten Oberfläche des Elektronenrohres in $\frac{\%}{0}$
 Die Anodenspannung betrug stets 800 Volt, der Glühkathodenheizstrom 1,400 Amp.

$\mathfrak{H} = 0$ Gauß.

Ar	p_a	$3,0 \cdot 10^{-5}$	$5,02 \cdot 10^{-5}$	$7,25 \cdot 10^{-5}$	$1,05 \cdot 10^{-4}$	$2,02 \cdot 10^{-4}$	$3,0 \cdot 10^{-4}$	$4,0 \cdot 10^{-4}$
	p_g	$1,33 \cdot 10^{-5}$	$3,13 \cdot 10^{-5}$	$4,53 \cdot 10^{-5}$	$6,83 \cdot 10^{-5}$	$1,28 \cdot 10^{-4}$	$2,1 \cdot 10^{-4}$	$2,73 \cdot 10^{-4}$
	N	55,6	37,7	37,5	33,3	36,8	30,1	31,7
	F	0,37	0,47	0,66	0,90	1,8	2,2	3,1

N ₂	p_a	$1,0 \cdot 10^{-4}$	$1,5 \cdot 10^{-4}$	$2,65 \cdot 10^{-4}$	$3,7 \cdot 10^{-4}$	$4,3 \cdot 10^{-4}$
	p_g	$7,0 \cdot 10^{-6}$	$1,6 \cdot 10^{-5}$	$3,4 \cdot 10^{-5}$	$5,0 \cdot 10^{-5}$	$7,2 \cdot 10^{-5}$
	N	93	89,4	87,2	86,5	83,2
	F	2,3	3,3	6,4	7,8	8,7

$\mathfrak{H} = 240$ Gauß.

He	p_a	$1,0 \cdot 10^{-4}$	$1,47 \cdot 10^{-4}$	$2,5 \cdot 10^{-4}$	$3,0 \cdot 10^{-4}$	$4,0 \cdot 10^{-4}$	$4,95 \cdot 10^{-4}$
	p_g	$7,9 \cdot 10^{-5}$	$1,13 \cdot 10^{-4}$	$2,08 \cdot 10^{-4}$	$2,56 \cdot 10^{-4}$	$3,35 \cdot 10^{-4}$	$4,20 \cdot 10^{-4}$
	N	21,0	23,0	17,0	14,7	16,2	15,0
	F	0,51	0,83	1,0	1,1	1,6	1,8

Ar	p_a	$3,0 \cdot 10^{-5}$	$1,0 \cdot 10^{-4}$	$2,05 \cdot 10^{-4}$	$3,02 \cdot 10^{-4}$	$3,95 \cdot 10^{-4}$
	p_g	$5,0 \cdot 10^{-7}$	$1,05 \cdot 10^{-5}$	$3,5 \cdot 10^{-5}$	$5,8 \cdot 10^{-5}$	$9,8 \cdot 10^{-5}$
	N	98,4	89,5	83	80,8	75,2
	F	0,72	2,2	4,2	5,9	7,3

N ₂	p_a	$2,75 \cdot 10^{-5}$	$1,0 \cdot 10^{-4}$	$1,9 \cdot 10^{-4}$	$3,1 \cdot 10^{-4}$	$4,0 \cdot 10^{-4}$
	p_g	$2,0 \cdot 10^{-7}$	$6,05 \cdot 10^{-7}$	$1,04 \cdot 10^{-6}$	$2,7 \cdot 10^{-6}$	$5,8 \cdot 10^{-6}$
	N	99,3	99,3	99,5	99	98,6
	F	0,67	2,4	4,6	7,5	9,5

In der jeweils ersten Horizontalreihe ist der Druck zu Anfang des Adsorptionsvorganges eingetragen (p_a), in der zweiten Reihe der Grenz-

druck (p_0), in der dritten Reihe der Betrag der aufgezehrten Atome bzw. Moleküle in Prozenten (N), in der vierten Reihe derjenige Betrag der inneren Oberfläche des Entladungsrohres in Prozenten (F), der vom adsorbierten Gas bedeckt wird, wobei angenommen wird, daß die aufgezehrten Atome

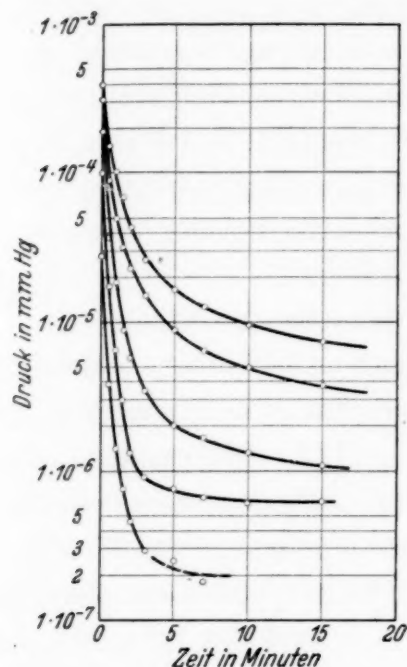


Fig. 11.

Fig. 11. Aufzehrung von Stickstoff mit Magnetfeld (240 Gauß) bei verschiedenen Anfangsdrücken. Die Anodenspannung betrug stets 800 Volt. Es ist der Druck (log) als Funktion der Zeit aufgetragen.

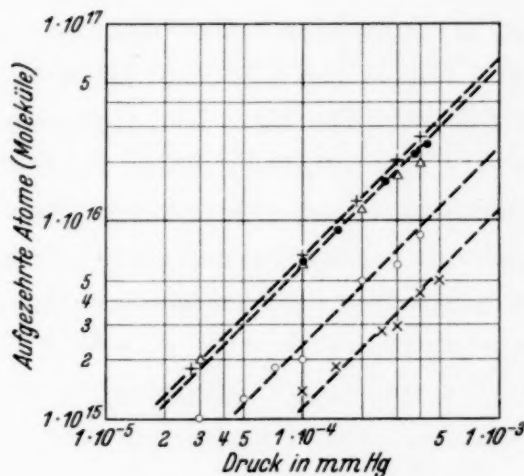


Fig. 12.

Fig. 12. Betrag der Aufzehrung als Funktion des Anfangsdruckes.

× — ×: He, $\mathfrak{H} = 240$ Gauß.

Δ — Δ: Ar, $\mathfrak{H} = 240$ Gauß.

○ — ○: Ar, $\mathfrak{H} = 0$ Gauß.

● — ●: N₂, $\mathfrak{H} = 0$ Gauß.

+ — +: N₂, $\mathfrak{H} = 240$ Gauß.

Die Anodenspannung betrug stets 800 Volt. Es ist die Zahl der aufgezehrten Atome (Moleküle) als Funktion des Anfangsdruckes aufgetragen (doppelter logarithmischer Maßstab).

bzw. Moleküle in einer monomolekularen Schicht auf der Glasoberfläche angeordnet sind. Die gesamte innere Oberfläche des Entladungsrohres betrug 100 cm².

Fig. 12 zeigt, wie die aufgezehrte Gasmenge vom Anfangsdruck p_a abhängt. Es ist die Zahl der adsorbierten Atome (Moleküle) als Funktion des Anfangsdruckes p_a aufgetragen, und zwar beide Koordinaten im logarithmischen Maßstab. Die einzelnen Punkte liegen für jedes Gas — bei gleicher Anodenspannung und gleichem Magnetfeld — recht befriedigend auf einer Geraden, die unter 45° zur Abszissenachse verläuft, d. h. der Betrag der Aufzehrung ist proportional dem Anfangsdruck.

Zusammenfassung.

1. Es wird die elektrische Aufzehrung von Helium, Argon und Stickstoff im Druckgebiet von $5 \cdot 10^{-4}$ mm Hg bis $1 \cdot 10^{-7}$ mm Hg untersucht. Die

Aufzehrung erfolgt in einer Glühkathodenröhre mit ringförmiger Anode, teils unter Benutzung eines longitudinalen Magnetfeldes.

2. Für Helium ist eine geringe Aufzehrung nur bei Benutzung des Magnetfeldes zu beobachten. Argon wird auch ohne Magnetfeld etwas aufgezehrt. Mit Magnetfeld ist die Aufzehrung beträchtlich stärker. Bei einem Anfangsdruck von $1 \cdot 10^{-4}$ mm Hg läßt sich ein Grenzvakuum von $1 \cdot 10^{-5}$ mm Hg erreichen. Etwa die gleiche Druckerniedrigung erfolgt bei der Aufzehrung von Stickstoff ohne Magnetfeld. Bei der Verwendung eines Feldes von 240 Gauß sinkt der Stickstoffdruck von $1 \cdot 10^{-4}$ mm Hg auf $6 \cdot 10^{-7}$ mm Hg. Die Anodenspannung betrug stets 800 Volt.

3. Das aufgezehrte Gas kommt zum großen Teil dann wieder zum Vorschein, wenn während des Adsorptionsvorganges das Magnetfeld fortgenommen wird, so daß die Glühelctronen auf die Glaswand des Entladungsrohres treffen können. Die Wirkung des Magnetfeldes beim Aufzehrungsprozeß beruht — neben einer Erhöhung der Gasionisation — darauf, daß eine Gasbefreiung durch Elektronenbombardement der Glaswand weitgehend verhindert wird.

Es ist sehr wahrscheinlich, daß das aufgezehrte Gas an der Glasoberfläche durch Adsorption im Sinne Langmuirs gebunden wird.

4. Für die Aufzehrung von Helium, Argon und Stickstoff besteht im wesentlichen die gleiche Abhängigkeit von der Spannung und der magnetischen Feldstärke, wie sie in I. für Luft und Wasserstoff mitgeteilt ist.

5. Der Adsorptionsverlauf läßt sich dann durch eine einfache Exponentialfunktion mit negativem Adsorptionskoeffizienten darstellen, wenn während der Aufzehrung die magnetischen und elektrischen Bedingungen (Anodenspannung, Elektronenstrom) konstant bleiben. Diese Darstellung gilt in einem größeren Druckbereich für die Aufzehrung von Helium mit Magnetfeld und von Argon ohne Magnetfeld.

6. Es wird berechnet, wieviel des anfänglich vorhandenen Gases durch die elektrische Entladung beseitigt wird.

In dem untersuchten Druckbereich wird durch das adsorbierte Gas nur ein kleiner Teil der Oberfläche des Entladungsrohres mit einer monomolekularen Schicht bedeckt.

Die Aufzehrung ist proportional dem Anfangsdruck.

Karlsruhe (Baden), im Juli 1934.

Elektrische Spitzenwirkungen bei sphärischen Leitern atomarer und subatomarer Größe.

Von Aug. Upmark in Lund.

Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 27. August 1934.)

Unter im nachfolgenden beschriebenen Umständen findet Gleichgewicht zwischen ungleichnamig geladenen Leitern statt, ohne daß sich diese berühren. Die Erscheinung führt zu einer elektrostatischen Theorie des Atombaus.

Wenn ein makroskopischer sphärischer Leiter in ein elektrisches Feld eingeführt wird, nimmt er das Potential des Feldes in dem Punkt an, mit dem sein Zentrum zusammenfällt. Wird er wieder aus dem Feld herausgezogen, führt er keine Ladung mit, sondern ist wie vor dem Einführen elektrisch neutral. Ganz anders verhält er sich, wenn er mit einer genügend langen leitenden Spitze versehen ist. Durch die Spitze nimmt er Elektrizität aus dem Felde auf. Er wird geladen.

Sei *A*, Fig. 1, ein isolierter sphärischer Leiter, der die Ladung $+E$ erhalten hat, und *B* ein von Anfang an ungeladener ähnlicher Leiter, der mit einer Spitze *S* versehen ist. Der Halbmesser von *B* sei gleich *r*, die Länge der Spitze gleich *l* und der Zentrumabstand zwischen *A* und *B* gleich *a*.

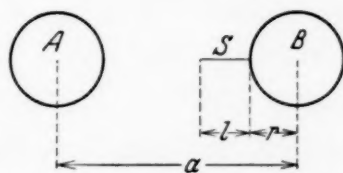


Fig. 1.

B nimmt die Ladung $+e$ durch die Spitze auf. Die Ladung von *A* wird dadurch gleich $E - e$. Das Feld setzt sich in jedem Punkt aus dem Feld von *B* und demjenigen von *A* zusammen. In dem Punkt, wo die Spitze endet, ist das Potential von *B* gleich e/r und dasjenige von *A* gleich $\frac{E - e}{a - (r + l)}$. Das Potential des Punktes ist also

$$P = \frac{e}{r} + \frac{E - e}{a - (r + l)}. \quad (1)$$

Dieses Potential erhält auch die Spitze und somit auch *B*.

Aus den Beobachtungen ist weiter hervorgegangen, daß die Spitze *S* um so kürzer sein kann, je kleiner der Halbmesser von *B* ist. Nun wissen wir aber, daß materielle Teilchen atomarer und subatomarer Größe ohne weiteres aus einem elektrischen Feld Elektrizität aufnehmen. Man benutzt ja oft eine Flamme, um den elektrischen Zustand der Atmosphäre zu bestimmen. Die Flamme zeichnet sich durch elektrische Spitzenwirkungen aus. Dies kann nicht auf irgendeiner Spitze der Flamme selbst beruhen.

Eine runde Flamme hat dieselbe Wirkung. Überdies leitet die Flamme nicht metallisch, sondern elektrolytisch. Die Spitzenwirkungen müssen daher auf die verschiedenen Teilchen der Flamme zurückgeführt werden. Diese haben aber keine Spitzen. Wir können sagen, daß bei einem Leiter der genannten Größenordnung jeder Punkt seiner Oberfläche als Spitze dient. Selbstverständlich nimmt der Leiter die Ladung in dem Punkt seiner Oberfläche auf, außerhalb dessen das Feld sein größtes Potential hat. Sei B ein solcher Leiter. Wenn also in (1) l gleich Null angenommen wird, lautet die Gleichung:

$$P = \frac{e}{r} + \frac{E - e}{a - r}. \quad (2)$$

Wir nehmen nun an, daß wir drei sphärische isolierte Leiter atomarer oder noch kleinerer Größe haben, A , B und C , von denen A die Ladung $+2E$ und jeder der anderen die Ladung $-E$ erhalten hat. Wir lassen sie alle auf einer Geraden liegen, A in der Mitte und B und C im Zentrumabstand a von A . Die Leiter nehmen Feldelektrizität auf, A die Menge $-2e$ und B und C je die Menge $+e$. Selbstverständlich muß bei so kleinen Leitern auch mit dem Raum der Ladungen gerechnet werden, die zugleich als leitend aufzufassen sind. Der Halbmesser von A und seiner Ladung sei gleich R und derjenige von B und C mit ihren Ladungen gleich r . Wenn die Potentiale der Leiter mit P_A , P_B und P_C bezeichnet werden, so ist

$$P_A = \frac{2(E - e)}{R} - \frac{2(E - e)}{a - R},$$

$$P_B = P_C = -\frac{E - e}{r} + \frac{2(E - e)}{a - r} - \frac{E - e}{2a - r}.$$

Wir setzen

$$a = mR = nr. \quad (3)$$

Vorstehende Gleichungen lauten dann:

$$P_A = \frac{2m(E - e)}{a} \left[1 - \frac{1}{m - 1} \right], \quad (4)$$

$$P_B = P_C = -\frac{n(E - e)}{a} \left[1 - \frac{2}{n - 1} + \frac{1}{2n - 1} \right]. \quad (5)$$

Die Differentiation der Potentiale nach a ergibt:

$$-\frac{dP_A}{da} = \frac{2m(E - e)}{a^2} \left[1 - \frac{1}{m - 1} \right], \quad (6)$$

$$-\frac{dP_B}{da} = -\frac{dP_C}{da} = -\frac{n(E - e)}{a^2} \left[1 - \frac{2}{n - 1} + \frac{1}{2n - 1} \right]. \quad (7)$$

Die Größe der zwischen A und B , bzw. A und C wirksamen Kraft ist also:

$$K = \frac{-2m(E-e)^2}{a^2} \left[1 - \frac{1}{m-1} \right] = \frac{-2n(E-e)^2}{a^2} \left[1 - \frac{2}{n-1} + \frac{1}{2n-1} \right]. \quad (8)$$

$e = E$ macht $K = 0$. Das würde aber eine vollständige Entladung der Leiter bedeuten. Wir schließen daher diesen Fall aus und nehmen $e < E$ an.

In Übereinstimmung mit dem Coulombschen Gesetz ist K den Elektrizitätsmengen von A und B bzw. von A und C direkt proportional und dem Quadrat des Zentrumabstandes a umgekehrt proportional. Der Koeffizient

$$m \left[1 - \frac{1}{m-1} \right] = n \left[1 - \frac{2}{n-1} + \frac{1}{2n-1} \right] \quad (9)$$

ist aber nur für $m = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = 2,62$ und $n = 3,29$ wie in der gewöhnlichen Formel gleich 1.

Aus Vorstehendem ergibt sich:

$$1. \ m = 2 \text{ macht } n = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = 2,62 \text{ und } K = 0.$$

Es findet weder Anziehung noch Abstoßung statt. Die Potentiale der Leiter sind alle gleich Null. Aus (3) berechnet sich

$$r = 0,76 R.$$

Die Ladungen der Leiter berühren also einander nicht, da bei Berührung $r = R$ sein würde.

2. $m > 2$ macht $n > 2,62$. K wird dann negativ, d. h. B und C werden von A angezogen. Das Potential von A ist positiv und das Potential von B und C negativ.

3. $m < 2$ macht $n < 2,62$. K wird positiv, d. h. B und C werden von A abgestoßen. Das Potential von A ist negativ und das Potential von B und C positiv.

Bei $a = 2 R = 2,62 r$ befinden sich also die Leiter im Gleichgewicht und ihre Potentiale sind alle gleich Null. Jede Änderung der Lage von B und C in der Richtung von oder nach A erfordert eine äußere Kraft und ruft demnach Reaktionskräfte hervor.

Wenn bei $a = 2 R$ A festgehalten und das eine der äußeren Teilchen, z. B. C , demselben etwas genähert wird, so werden A und B negativ elektrisch und A mehr als B . Das muß zur Folge haben, daß sich B von A entfernt, wodurch B mehr negativ und A weniger negativ elektrisch wird als zuvor. Als A und B gleiches Potential erhalten haben, findet Gleichgewicht zwischen diesen Teilchen statt. Wenn B fortfährt, sich von A

zu entfernen, so würde eine Potentialdifferenz zwischen A und B eintreten, wodurch B von A angezogen werden müßte. Wegen der Trägheit überschreitet zwar B mehr oder weniger die Gleichgewichtslage, wird aber wieder zurückgezogen und gerät auf diese Weise in Schwingungen.

Wenn umgekehrt C von A etwas entfernt wird, so erhalten A und B positive Potentiale und A ein größeres Potential als B . Dadurch nähert sich B dem Teilchen A , bis beide gleiches Potential erhalten haben. Fährt man fort, C von A zu entfernen, so wird zuletzt B von A aufgefangen. Wird dann C losgelassen, zieht AB dieses Teilchen bis zur Berührung an, und es entsteht ein neues neutrales System, ABC . Die Feldladungen fallen in diesem System weg. Wenn aber A aus kondensierter positiver Elektrizität besteht, was z. B. mit einem Wasserstoffkern oder einem Positron der Fall ist, und B und C aus kondensierter negativer Elektrizität, so hält das System jedoch zusammen.

Das Gleichgewicht eines Systems wie ABC bei $a = 2R = 2,62r$ würde nicht sehr stabil sein. Ein einfacher Stoß an das eine oder andere Teilchen würde bewirken können, daß sowohl B als C von A aufgefangen würden. Selbstverständlich wird die Stabilität größer, wenn sich mehrere Teilchen um das Zentralteilchen herum gruppieren. In einer früheren Arbeit¹⁾, die durch die Entdeckung des Positrons neue Aktualität erhalten hat, sind einige Beispiele der Gleichgewichtsbedingungen eines neutralen Systems angeführt, wenn ein fingiertes, aus positiver Elektrizität bestehendes Teilchen A von 4, 6, 8, 12 und 20 Elektronen umgeben ist. Die Elektronen liegen in den Ecken der platonischen Figuren, des Tetraeders, des Oktaeders, des Hexaeders, des Ikosaeders und des Dodekaeders, mit A im Zentrum. Das Verhältnis r/R (s. oben) ist in der Tabelle 1 angeführt.

Tabelle 1.

Zahl der Elektronen	r/R	Zahl der Elektronen	r/R
4	0,58	12	0,38 ²⁾
6	0,50	20	0,33
8	0,42		

Da die Elektronen im Abstand $a = 2R$ von A liegen, findet in keinem Falle Berührung zwischen der Feldladung von A und denjenigen der Elektronen statt.

¹⁾ Aug. Upmark, Eine elektrostatische Theorie des Atombaues. Lund, A.-B. Ph. Lindstedts Univ.-Bokhandel, 1927. S. 21–23. — ²⁾ Genau dasselbe Resultat wird erhalten, wenn die Elektronen in den Mittelpunkten der Kanten eines Oktaeders oder Würfels liegen.

Bei gleichem Wert von a müssen die Elektronen, wenn sie auf den Raum rings um A verteilt sind und sich im Gleichgewicht befinden, offenbar in gerader Anzahl vorhanden sein, da sie alle gleiche Lagen einnehmen müssen, und dies mit einer ungeraden Anzahl nicht möglich ist. Aber selbst wenn ihre Anzahl gerade ist, können sie nicht immer denselben Wert von a erhalten. 10 Elektronen z. B. müssen sich in zwei Schichten zerlegen, von denen die eine 8 oder 6 und die andere 2 bzw. 4 Elektronen enthält. Die Zerlegung ist also: $10 = 8 + 2$ oder $10 = 6 + 4$. Im ersten Falle liegen die 2 Elektronen einander und 2 Würfelflächen gerade gegenüber, während im zweiten Falle die 4 Elektronen in den Ecken eines regulären Tetraeders und in 4 Oktanten des Oktaeders liegen müssen. Nur dadurch werden die Elektronen derselben Schicht von denjenigen der anderen Schicht gleich beeinflusst. Jede Schicht hat dann ihren eigenen Wert von a .

Wenn es eine größere Menge von Elektronen gibt, ist einzusehen, daß diese auf mehrere Schichten verteilt sein müssen. Da sie nun alle beim Gleichgewicht das Potential Null haben sollen, muß die positive Feldladung jedes Elektrons in einer äußeren Schicht größer als in einer inneren sein.

Von den im vorstehenden beschriebenen fingierten Atomen kommen wir mit einem kurzen Schritt zu den wirklichen Atomen. Nach der Rutherfordschen Hypothese soll das Wasserstoffatom einen aus positiver Elektrizität bestehenden Kern, das Proton, und ein Elektron enthalten. Das Proton soll dieselbe Elektrizitätsmenge wie das Elektron haben, aber eine rund 1800mal größere Masse. Nach der Entdeckung des Positrons, das auch aus positiver Elektrizität besteht, kann diese Hypothese nicht mehr aufrechterhalten werden. Das Positron hat, soviel man noch weiß, etwa dieselbe Masse und Elektrizitätsmenge wie das Elektron. Dies bedeutet, daß gleiche Elektrizitätsmengen auch gleiche Massen haben müssen, was übrigens schon a priori selbstverständlich erscheint. Die neue Hypothese von Curie-Joliot, nach der das Proton aus einem Neutron und einem Positron bestehen soll, ist komplizierter als die Rutherfordsche und gleich unbefriedigend. Ich komme hierauf in meinem nächsten Aufsatz zurück. Wenn der Wasserstoffkern positive Elektrizität ist, was kaum bezweifelt werden kann, so muß das Atom eine solche Menge von Elektronen enthalten, daß ihre gesamte Masse der Masse des Kerns gleich ist. Beim Aufstellen meiner elektrostatischen Theorie bin ich auch von dieser Voraussetzung ausgegangen.

Über eine Ableitung der Magnetisierungsfunktion von Ferromagnetika, die im ganzen Temperaturgebiet gültig ist.

Von **H. Ludloff**, zur Zeit in Leipzig.

Mit 10 Abbildungen. (Eingegangen am 17. August 1934.)

Auf Grund der Erkenntnis, daß sich die Energiewerte eines Ferromagneten vollständig analog verhalten wie die Energiewerte eines van der Waalsschen Gases, das der Bose-Statistik genügt, läßt sich ein Schema aufstellen, das für hohe Temperaturen in die Heisenbergsche, für tiefe Temperaturen in die Blochsche Theorie des Ferromagnetismus übergeht und auch im mittleren Temperaturgebiet der beiden Curiepunkte eine befriedigende Darstellung des Magnetisierungsverlaufs gestattet. — § 1. Aufstellung der freien Energie dieses Modells. Diskussion des Magnetisierungsverlaufs § 2 für hohe Temperaturen, § 3 für tiefe Temperaturen, § 4 für das Gebiet der Curie-Punkte. § 5. Ausblick auf Verallgemeinerungen. § 6. Anhang.

§ 1. Die Ableitung der Magnetisierungsfunktion ferromagnetischer Körper ist bereits mehrfach Gegenstand quantentheoretischer Untersuchungen gewesen¹⁾²⁾. Hierbei wurde ein Modell des Ferromagneten zugrunde gelegt, bei dem jedes Atom des Gitters ein Valenzelektron mit zugehörigem Spin besitzt, der bezüglich einer vorgegebenen Richtung nach rechts oder links orientiert sein kann; nach resultierenden Spin-Impulsen geordnet, läßt sich die Gesamtheit der Gitterterme in Termsysteme zerlegen. Durch Berechnung der Termschwerpunkte dieser Systeme werden in Heisenbergs Theorie besonders die Magnetisierungsverhältnisse bei hohen Temperaturen erfaßt. Der Magnetisierungsverlauf bei tiefen Temperaturen erfordert eine detailliertere Behandlung der quantenmechanischen Grundgleichungen des Ferromagnetismus, die von F. Bloch erfolgreich in Angriff genommen wurde. — In diesem Zusammenhang scheint es wünschenswert, ein Schema aufzufinden, das die Blochsche und die Heisenbergsche Darstellung als Grenzfälle umfaßt und auch im mittleren Temperaturgebiet der beiden Curie-Punkte experimentell zu bestätigende Aussagen enthält.

Als Ausgangspunkt der Untersuchung dienen die Slater-Blochschen Gleichungen des festen Körpers, welche, wie Bloch gezeigt hat²⁾, für kleine Energien Näherungslösungen zulassen, die eine relativ einfache und anschauliche Deutung des komplizierten Sachverhalts ermöglichen. Für ein Termsystem, das durch das resultierende magnetische Moment $(2r - N)\mu$ charakterisiert ist, wo r die Zahl der rechts gerichteten Spinimpulse und N

¹⁾ W. Heisenberg, ZS. f. Phys. **49**, 619, 1928. — ²⁾ F. Bloch, ebenda **61**, 206, 1929.

die Gesamtzahl der Atome bedeutet (μ ist das Bohrsche Magneton), lassen sich die Eigenwerte schreiben in der Form:

$$\varepsilon = 2I \cdot \sum_{i=1}^r \left(1 - \cos \frac{2\pi}{N} k_i\right) \sim I \cdot \sum_{i=1}^r \left(\frac{2\pi k_i}{N}\right)^2,$$

wo I das Austauschintegral und k_i Quantenzahlen sind, und die Eigenfunktionen in der Form:

$$\psi(f_1 \dots f_r) = e^{\frac{2\pi i}{N} (k_1 f_1 + \dots + k_r f_r)},$$

wo $f_1 \dots f_r$ die Koordinaten der Rechtsspins im Gitter bedeuten. Dieses Resultat besagt, daß die Eigenwerte und Eigenfunktionen des magnetischen festen Körpers sich in dieser Näherung darstellen lassen wie die eines idealen Gases, das der Einstein-Bose-Statistik genügt; die Individuen dieses Gases sind die rechts- bzw. linksgerichteten Spine mit der Masse

$M = \frac{\hbar^2}{2Ia^2}$. Dieses einfache und anschauliche Ergebnis ist, wie gesagt, nur für die tief gelegenen Eigenwerte gültig; auch die hieraus gezogenen Folgerungen beschränken sich daher auf tiefe Temperaturen, für die sich ein $T^{3/2}$ -Gesetz der Magnetisierung ableiten läßt.

Um nun den Magnetisierungsverhältnissen im ganzen Temperaturgebiet gerecht zu werden, scheint der Versuch lohnend, das obige einfache Bild des Spingases in möglichst übersichtlicher Form zu verallgemeinern. Als naheliegende Verallgemeinerung bietet sich die Annahme dar, daß das erwähnte Spingas in Wirklichkeit nicht ein ideales, sondern ein van der Waalsches Gas ist, für das aber wiederum die Einstein-Bose-Statistik gelten soll. In der Tat wird die Annahme von van der Waals-Kräften zwischen den Spinen nahegelegt, wenn man den Typus der Spin-Wechselwirkungskräfte näher ins Auge faßt. Zunächst werden die Spine in geringen Entfernungen sich abstoßen müssen, da es niemals vorkommen soll, daß zwei Spine sich innerhalb eines Würfels von der Kantenlänge der Gitterkonstanten zusammen aufhalten. (G solche Würfel sollen längs der Kante, $G^3 = N$ Würfel im ganzen Ferromagneten liegen.) Andererseits werden in größeren Entfernungen sich die Spine anziehen infolge der Austauschwechselwirkung, welche sogar eine teilweise Komplexbildung der Spine zur Folge hat¹⁾. Man wird daher, wie bei der kinetischen Ableitung der van der Waals-Gleichung, die Abstoßungskräfte dadurch berücksichtigen, daß man die Spinmolekeln mit einem Eigenvolumen umgibt, und andererseits für größere Entfernungen ein Anziehungspotential zwischen den Spins ansetzen, das der Anzahl der Spine oder ihrer Dichte proportional ist.

¹⁾ Vgl. hierzu H. Bethe, ZS. f. Phys. **71**, 205, 1931.

Da das Anziehungspotential gleichzeitig mit der kinetischen Energie ε_{klm} der Spine verschwinden muß, damit die Gesamtenergie niemals negativ wird¹⁾, so ergibt sich als natürlicher Ansatz für die Energie einer Spinmolekel $\varepsilon_{klm} \left(1 - c \frac{r}{N}\right)$, wo c ein noch zu bestimmender Parameter ist.

Die Abstoßungskräfte werden dadurch berücksichtigt, daß das gesamte r Spinmolekeln zu Verfügung stehende Volumen nicht mehr proportional N ist, sondern infolge der Eigenvolumina nur mehr proportional $(N - br)$ zu setzen ist. Dabei wird man von vornherein annehmen können, daß die Konstante b den Wert 1 besitzt, da ja eben für eine Spinmolekel nur $N - r$ Plätze zur Verfügung stehen, wenn schon r Spinmolekeln vorhanden sind. Die endgültige Bestimmung aber wird so erfolgen, daß die Konstanten b und c dazu verwandt werden, um das Verhalten des Spingases bei hohen Temperaturen in Einklang mit Heisenbergs Schwerpunkstheorie zu bringen. — Eine weitere Forderung, die an das Problem zu stellen ist, ist die, daß bei Abwesenheit eines äußeren Feldes die Rechts- und Linkspine gleichberechtigt sein müssen, oder daß das Problem symmetrisch ist bezüglich $r = N/2$. Gerade die Erfüllung dieser Forderung, welche erst eigentlich die beschränkte Gültigkeit der Blochschen Betrachtungsweise ($r \ll N$) aufhebt, ist naturgemäß eine notwendige Vorbedingung, um das charakteristische Verschwinden der Magnetisierung von einem bestimmten Temperaturpunkt an ableiten zu können, wie es dem Verhalten der Magnetisierung oberhalb des Curie-Punktes entspricht (siehe Fig. 1).

Um die gewünschten Magnetisierungsgrößen ableiten zu können, ist es unser nächstes Ziel, unter Berücksichtigung der genannten Forderungen die freie Energie des Problems aufzustellen. Die bekannten Formeln der Bose-Einstein-Statistik ergeben für die freie Energie eines Spingases von r Rechtsspinnen und $N - r$ Linksspinnen bei Einwirkung eines äußeren Magnetfeldes H den folgenden Ausdruck:

$$F = \frac{1}{2} \left\{ kT \left(1 - b \frac{r}{N}\right) \sum_{k, l, m} \ln \left(1 - e^{-\gamma_1 - \frac{I \left[\left(2 \sin \frac{2\pi}{G} k\right)^2 + \left(2 \sin \frac{2\pi}{G} l\right)^2 + \left(2 \sin \frac{2\pi}{G} m\right)^2 \right] \left(1 - c \frac{r}{N}\right)}{kT}} \right. \right. \\ \left. \left. - \gamma_1 \cdot kT \cdot r \right. \right. \\ \left. + kT \left(1 - b \left(1 - \frac{r}{N}\right)\right) \sum_{k, l, m} \ln \left(1 - e^{-\gamma_2 - \frac{I \left[\left(2 \sin \frac{2\pi}{G} k\right)^2 + \left(2 \sin \frac{2\pi}{G} l\right)^2 + \left(2 \sin \frac{2\pi}{G} m\right)^2 \right] \left(1 - c \left(1 - \frac{r}{N}\right)\right)}{kT}} \right. \right. \\ \left. \left. - \gamma_2 \cdot kT \cdot (N - r) \right\} + \mu (N - 2r) H. \quad (1)$$

¹⁾ Vgl. hierzu den Satz von E. Teller, ZS. f. Phys. **62**, 102, 1930.

Hier sind γ_1 und γ_2 Lagrangesche Parameter¹⁾, die so gewählt werden müssen, daß F als Funktion von ihnen ein Minimum wird.

Den für bestimmte Werte von H und T sich einstellenden Wert von r erhält man, indem man verlangt, daß F auch als Funktion von r ein Minimum sein soll; also

$$\frac{\partial F}{\partial \gamma_1} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial \gamma_2} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial r} = 0, \quad (2)$$

woraus γ_1 , γ_2 und r als Funktionen von T und H und damit die Magnetisierungsfunktion sich berechnen lassen.

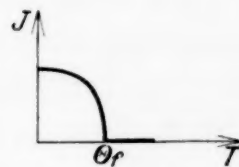


Fig. 1.

Explizit lauten die Gleichungen (2), wenn man $\frac{2\pi}{G} k = \xi, \dots$ setzt und die Summen in Integrale verwandelt, folgendermaßen:

$$\left. \begin{aligned} & \left(1 - b \cdot \frac{r}{N}\right) \frac{1}{\pi^3} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{d\xi d\eta d\zeta}{e^{\gamma_1 + \frac{4I[\sin^2 \xi + \sin^2 \eta + \sin^2 \zeta](1 - c \frac{r}{N})}{kT}} - 1} = \frac{r}{N}, \\ & \left(1 - b \left(1 - \frac{r}{N}\right)\right) \frac{1}{\pi^3} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{d\xi d\eta d\zeta}{e^{\gamma_2 + \frac{4I[\sin^2 \xi + \sin^2 \eta + \sin^2 \zeta](1 - c(1 - \frac{r}{N}))}{kT}} - 1} = \frac{N-r}{N} \\ & \text{und} \\ & -\frac{b}{\pi^3} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi d\xi d\eta d\zeta \cdot \ln \left(1 - e^{-\gamma_1 - \frac{4I[\sin^2 \xi + \sin^2 \eta + \sin^2 \zeta](1 - c \frac{r}{N})}{kT}}\right) \\ & - \frac{c}{N} (N - br) \frac{1}{\pi^3} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi d\xi d\eta d\zeta \frac{\frac{4I}{kT} [\sin^2 \xi + \sin^2 \eta + \sin^2 \zeta]}{e^{\gamma_1 + \frac{4I[\sin^2 \xi + \sin^2 \eta + \sin^2 \zeta](1 - c \frac{r}{N})}{kT}} - 1} - \gamma_1 \\ & + \frac{b}{\pi^3} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi d\xi d\eta d\zeta \cdot \ln \left(1 - e^{-\gamma_2 - \frac{4I[\sin^2 \xi + \sin^2 \eta + \sin^2 \zeta](1 - c(1 - \frac{r}{N}))}{kT}}\right) \\ & + \frac{c}{N} (N - b(N - r)) \frac{1}{\pi^3} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi d\xi d\eta d\zeta \frac{\frac{4I}{kT} [\sin^2 \xi + \sin^2 \eta + \sin^2 \zeta]}{e^{\gamma_2 + \frac{4I[\sin^2 \xi + \sin^2 \eta + \sin^2 \zeta](1 - c(1 - \frac{r}{N}))}{kT}} - 1} + \gamma_2 \\ & - \frac{4\mu H}{kT} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

¹⁾ Über diese Bestimmung der freien Energie vgl. W. Pauli, ZS. f. Phys. 41, 81, 1927.

Es soll nun dazu übergegangen werden, an Hand der drei obigen transzendenten Gleichungen die Magnetisierungsfunktion für tiefe, für mittlere und für hohe Temperaturen gesondert zu diskutieren.

§ 2. Zunächst soll das Verhalten unseres Spingases bei hohen Temperaturen betrachtet werden. Da die Zählweise der Einstein-Bose-Statistik für hohe Temperaturen in die der Boltzmann-Statistik übergeht, werden auch die Formeln unseres Bose-Einstein-Spingases in die eines Boltzmannschen Gases übergehen müssen, wie es in der Langevinschen Theorie des Paramagnetismus verwandt wird. Für hohe Temperaturen darf in erster Näherung die Energie einer Spinnmolekel $\varepsilon_{klm} = 0$ gesetzt werden, so daß die Formeln (3) folgende einfache Gestalt annehmen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \gamma_1} = 0: \quad \frac{N - br}{e^{\gamma_1} - 1} - r = 0; \quad \frac{1}{e^{\gamma_1} - 1} &= \frac{r}{N - br}, \\ \frac{\partial F}{\partial \gamma_2} = 0: \quad \frac{N - b(N-r)}{e^{\gamma_2} - 1} - (N-r) = 0; \quad \frac{1}{e^{\gamma_2} - 1} &= \frac{N-r}{N - b(N-r)}, \\ \frac{\partial F}{\partial r} = 0: \quad \frac{b}{2} \{ -[\ln(1 - e^{-\gamma_1}) + \ln(1 - e^{-\gamma_2})] \} - \frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_2) &= \frac{2\mu H}{kT} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

und wenn man entwickelt:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{1(2)} &= \gamma_0 + \gamma'_{1(2)}: \\ \frac{b}{2} \left\{ - \left[\ln(1 - e^{-\gamma_0}) + \frac{1}{e^{\gamma_0} - 1} \cdot \gamma'_1 \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[\ln(1 - e^{-\gamma_0}) + \frac{1}{e^{\gamma_0} - 1} \cdot \gamma'_2 \right] \right\} - \frac{1}{2}(\gamma'_1 - \gamma'_2) = \frac{2\mu H}{kT}, \\ \text{oder} \\ (-\gamma'_1 + \gamma'_2) &= \frac{4\mu H}{kT} \cdot \frac{e^{\gamma_0} - 1}{e^{\gamma_0} - 1 + b}; \quad -\gamma'_1 = \gamma'_2 = \frac{2\mu H}{kT} \cdot \frac{e^{\gamma_0} - 1}{e^{\gamma_0} - 1 + b}. \end{aligned} \right\} \quad (4a)$$

Wie man sieht, ist für $H = 0$ $\gamma_1 = \gamma_2$ und damit $r = N - r = N/2$. Die Magnetisierung ist also für verschwindendes Feld gleich Null — so lange diese Näherung gilt; für kleine H darf man also entwickeln $r = N/2 + \varepsilon$ und erhält aus der ersten bzw. zweiten Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^{\gamma_0} - 1} \pm \left\{ \frac{e^{\gamma_0}}{(e^{\gamma_0} - 1)^2} \cdot \left(\frac{e^{\gamma_0} - 1}{e^{\gamma_0} - 1 + b} \right) \right\} \frac{2\mu H}{kT} \\ = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{b}{2}} \pm \frac{\varepsilon}{N} \left\{ \frac{1}{1 - \frac{b}{2}} \left(1 + \frac{b/2}{1 - \frac{b}{2}} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{e^{\gamma_0} - 1} &= \frac{1}{2 - b}; \\ J = 2 \varepsilon \mu &= \frac{4 \mu^2 H}{k T} N \left(1 - \frac{b}{2}\right)^2 \left\{ \frac{e^{\gamma_0}}{(e^{\gamma_0} - 1)^2} \left(\frac{e^{\gamma_0} - 1}{e^{\gamma_0} - 1 + b} \right) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Gemäß der Langevinschen Theorie muß das Curiesche Gesetz folgen:

$$J = 2 \varepsilon \mu = \frac{N \mu^2 \cdot H}{k T}. \quad (5a)$$

Dies wird, wie oben schon erwähnt, erreicht für den Wert $b = 1$, den wir für das Folgende zugrunde legen.

Die obigen Betrachtungen sollen nunmehr auch in der nächsten Näherung durchgeführt und dann mit den Resultaten der Heisenberg-schen Schwerpunktmethode verglichen werden. Es wird jetzt also nicht mehr $\varepsilon_{klm} = 0$ gesetzt, sondern die Entwicklung der freien Energie bis zum ersten Gliede in ε_{klm}/T berücksichtigt. — Um das Verhalten der Magnetisierung in möglichst übersichtlicher Weise zu bestimmen, wird man die drei Bestimmungsgleichungen nach kleinen Feldstärken entwickeln: Setzt man

$$\frac{F}{k T N} = \Phi\left(\gamma_1 \gamma_2 \frac{r}{N}\right) + \frac{\mu H}{k T} \left(1 - 2 \frac{r}{N}\right),$$

so hat man:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_1}\right)_{\gamma_2 \frac{r}{N}} &= 0; & \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_1}\right)_{\gamma_1 = \gamma_0, \gamma_2 = \gamma_0, \frac{r}{N} = \frac{1}{2}} &= 0, \\ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_2}\right)_{\gamma_1 \frac{r}{N}} &= 0; & \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_2}\right)_{\gamma_2 = \gamma_0, \gamma_1 = \gamma_0, \frac{r}{N} = \frac{1}{2}} &= 0, \\ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \left(\frac{r}{N}\right)}\right)_{\gamma_1 \gamma_2} - \frac{2 \mu H}{k T} &= 0; & \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \left(\frac{r}{N}\right)}\right)_{\gamma_1 = \gamma_0, \gamma_2 = \gamma_0, \frac{r}{N} = \frac{1}{2}} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Infolgedessen kann man entwickeln:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_1}\right)_{\gamma_0, 1/2} + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_1^2}\right)_{\gamma_0, 1/2} \cdot f_1 + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_1 \partial \varrho}\right)_{\gamma_0, 1/2} \cdot \eta &= 0, \\ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_2}\right)_{\gamma_0, 1/2} + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_2^2}\right)_{\gamma_0, 1/2} \cdot f_2 + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_2 \partial \varrho}\right)_{\gamma_0, 1/2} \cdot \eta &= 0, \\ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varrho}\right)_{\gamma_0, 1/2} + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varrho \partial \gamma_1}\right)_{\gamma_0, 1/2} \cdot f_1 + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_2 \partial \varrho}\right)_{\gamma_0, 1/2} \cdot f_2 \\ &+ \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varrho^2}\right)_{\gamma_0, 1/2} \cdot \eta = \frac{2 \mu H}{k T}, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

wo

$$f_1 = \gamma_1 - \gamma_0, \quad f_2 = \gamma_2 - \gamma_0, \quad \frac{r}{N} = \varrho, \quad \eta = \varrho - \frac{1}{2}$$

ist. Also:

$$f_1 = - \left(\frac{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_1 \partial \varrho}}{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_1^2}} \right)_{\gamma_0, 1/2} \cdot \eta, \quad f_2 = - \left(\frac{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_2 \partial \varrho}}{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_2^2}} \right) \cdot \eta.$$

Unter Benutzung der beiden letzten Gleichungen ergibt sich:

$$\left\{ - \frac{\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varrho \partial \gamma_1} \right)^2}{\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_1^2} \right)} - \frac{\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varrho \partial \gamma_2} \right)^2}{\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_2^2} \right)} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varrho^2} \right\} \cdot \eta = 2 \cdot \frac{\mu H}{k T}$$

und

$$J = 2 \cdot N \cdot \eta \cdot \mu = \frac{2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma^2}}{- \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varrho \partial \gamma} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varrho^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma^2} \right)} \cdot \frac{N \mu^2 H}{k T}. \quad (8)$$

Für Φ setzt man eine Entwicklung nach Θ/T an und erhält:

$$\Phi = \frac{1}{2} \left\{ (1 - \varrho) \left[\ln(1 - e^{-\gamma_1}) + \frac{\Theta}{T} \frac{(1 - c \varrho)}{e^{\gamma_1} - 1} \cdot \lambda \right] \right. \\ \left. + \varrho \left[\ln(1 - e^{-\gamma_2}) + \frac{\Theta}{T} \frac{(1 - c(1 - \varrho))}{e^{\gamma_2} - 1} \cdot \lambda \right] \right\}, \quad (9)$$

wo

$$\Theta = \frac{J}{k}$$

und

$$\lambda = \frac{1}{\pi^3} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi d\xi d\eta d\zeta [(2 \sin \xi)^2 + (2 \sin \eta)^2 + (2 \sin \zeta)^2]$$

ist. Hieraus folgt, wenn man nur Größen erster Ordnung in Θ/T berücksichtigt:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_1^2} \right)_{\gamma_1 = \gamma_0} &= \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_2^2} \right)_{\gamma_2 = \gamma_0} = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma^2} \right) = -\frac{1}{2}, \\ \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varrho \partial \gamma_1} \right)^2 &= \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varrho \partial \gamma_2} \right)^2 = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varrho \partial \gamma} \right)^2 = 1 - \frac{\Theta}{T} \cdot \lambda \cdot c, \\ \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varrho^2} \right) &= \frac{\Theta}{T} \cdot 2 \cdot \lambda \cdot c. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Nun ist $\lambda = 6$, so daß hier λ mit Z , der Zahl der Nachbarn im Atomgitter, übereinstimmt.

Man erhält somit für die Magnetisierung:

$$J = \frac{N \mu^2 H}{k T \left[1 - c \left\{ \lambda \cdot \frac{\Theta}{T} - \frac{1}{2} \left(2 \frac{\Theta}{T} \lambda \right) \cdot \frac{1}{2} \right\} \right]} = \frac{N \mu^2 H \left(1 + c Z \cdot \frac{\Theta}{T} \cdot \frac{1}{2} \right)}{k T}. \quad (11)$$

Nach der Heisenbergschen Theorie aber ergibt sich der paramagnetische Curie-Punkt $\Theta_{\text{par}} = \Theta \cdot \frac{Z}{2}$; man erhält also aus unseren Rechnungen das bekannte Curie-Weiss'sche Gesetz, wenn man $c = 1$ setzt, was von nun an geschehen soll. — Es ist bemerkenswert, daß sich das Curie-Weiss'sche Gesetz nur dadurch ergibt, daß die van der Waalsschen c -Kräfte eingeführt wurden; das Analoge wird sich bei der Bestimmung des Term-schwerpunktes ergeben, dessen Berechnung wir uns jetzt zuwenden wollen. Der Mittelwert der Energie eines Systems von r Teilchen ergibt sich aus der freien Energie F dieses Systems mittels der Formel

$$\bar{E} = - T^2 \cdot \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{F}{T} \right). \quad (12)$$

Geht man von dem obigen Ausdruck (9) für die freie Energie aus, so ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_1} = 0: \quad \frac{1}{e^{\gamma_1} - 1} &= \frac{r}{N - r} + \frac{\Theta}{T} \left(1 - c \frac{r}{N} \right) \frac{r N}{(N - r)^2} \cdot \lambda, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_2} = 0: \quad \frac{1}{e^{\gamma_2} - 1} &= \frac{N - r}{r} + \frac{\Theta}{T} \left(1 - c \left(1 - \frac{r}{N} \right) \right) \frac{N (N - r)}{r^2} \cdot \lambda. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Unter Benutzung dieser Gleichungen folgt für den temperaturabhängigen Teil der freien Energie (9):

$$\Phi' = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Theta}{T} \cdot \lambda \left[\left(1 - c \frac{r}{N} \right) \left(r - \frac{r N}{N - 2r} \right) + \left(1 - c \left(1 - \frac{r}{N} \right) \right) \left(N - r - \frac{N (N - r)}{2r - N} \right) \right], \quad (14)$$

und damit für die mittlere Energie:

$$\begin{aligned}\bar{E} &= I \cdot \lambda \left\{ N - c \frac{r^2 + N^2 - N r}{N} \right\} \\ &= I \cdot \lambda \left\{ -\frac{c \cdot m^2}{N} + \frac{N^2 + c \left(-N^2 + \frac{N^2}{4} \right)}{N} \right\},\end{aligned}\quad (15)$$

wo $m = N/2 - r$ die magnetische Quantenzahl ist.

Dies Resultat zeigt, daß für $c = 0$ $\bar{E} = I \cdot \lambda \cdot N$ ist, ganz unabhängig von m und damit von der Temperatur. Dies ist auch evident, da ohne van der Waals-Kräfte die Energie der Rechtsspine und Linksspine gleich ist und damit die Summe der Energien von $N - r$ Rechts- und r Linksspinen immer gleich $I \cdot \lambda \cdot N$ sein muß. Hierdurch ist jetzt auch verständlich, daß das Weiss'sche Glied im Curie-Weiss'schen Gesetz nur für $c \neq 0$ herauskommt. Bei Berücksichtigung der van der Waals-Kräfte ergibt sich eine Abhängigkeit des Termschwerpunktes von m , der mit dem Wert der Heisenbergschen Theorie übereinstimmt, falls wiederum $c = 1$ gesetzt wird. Der Heisenbergsche Wert ist nämlich proportional $-\Theta_p \cdot 2 m^2/N$, was wieder mit dem Obigen identisch ist, wenn man $\lambda = Z$ setzt.

§ 3. Als nächster Punkt sei der Fall tieferer Temperaturen ins Auge gefaßt. Hier ist es erlaubt, im Ausdruck (3) für die Energie

$$\varepsilon_{klm} = I(k^2 + l^2 + m^2) \frac{4\pi^2}{G^2}$$

und für die obere Grenze anstatt $\pi \infty$ zu setzen.

Beachtet man noch, daß nach dem oben Gesagten $b = c = 1$ gesetzt werden muß, so nehmen die Bestimmungsgleichungen folgende einfache Gestalt an:

$$\left. \begin{aligned}\frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{T}{\Theta} \right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\sqrt{u} du}{e^{\gamma_1 + u} - 1} &= \varrho (1 - \varrho)^{1/2}, \\ \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{T}{\Theta} \right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\sqrt{u} du}{e^{\gamma_2 + u} - 1} &= (1 - \varrho) (\varrho)^{1/2},\end{aligned} \right\} \quad (16)$$

wo die Hilfsgröße

$$\begin{aligned}u &= \frac{\Theta}{T} (k^2 + l^2 + m^2) \frac{4\pi^2}{G^2} (1 - \varrho) \\ \text{bzw.} &= \frac{\Theta}{T} (k^2 + l^2 + m^2) \frac{4\pi^2}{G^2} \cdot \varrho\end{aligned}$$

gesetzt ist. Ferner lassen sich nunmehr in der dritten Gleichung die zweiten Integrale auf die ersten zurückführen, so daß

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{(1-\varrho)^{3/2}} \cdot \frac{1}{3} \int_0^\infty \frac{u^{3/2} du}{e^{\gamma_1 + u} - 1} + \frac{1}{\varrho^{3/2}} \cdot \frac{1}{3} \int_0^\infty \frac{u^{3/2} du}{e^{\gamma_2 + u} - 1} \\
 & = (\gamma_1 - \gamma_2) 4 \pi^2 \left(\frac{\Theta}{T} \right)^{3/2} + 4 \mu H \cdot 4 \pi^2 \left(\frac{\Theta}{T} \right)^{3/2}. \quad (16a)
 \end{aligned}$$

Im Temperaturgebiet unterhalb des Curie-Punktes reicht es bereits aus, den einfachsten Fall $H = 0$ zu diskutieren. Dann fällt in der dritten Gleichung die rechte Seite fort, und den drei Gleichungen wird genügt durch $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma = 0$. Für diesen Parameterwert nämlich nimmt jedes der beiden vorkommenden Integrale einen kontinuierlichen Bereich von Werten zwischen einem endlichen Grenzwert und ∞ an (siehe Fig. 2).

Dies wird ersichtlich, wenn man vom Integral zur Summe übergeht und für einen der Summanden $u = -\gamma$ wählt, so daß dieser Summand unendlich wird. Für diesen Zweck muß in der Summe γ als negative endliche Zahl gewählt werden. Beim Übergang zum Integral läßt man dann γ gegen Null konvergieren. Daher wird das Integral für $\gamma \geq 0$ einem endlichen Grenzwert zustreben, für $\gamma \leq 0$ aber divergieren, also im Punkt $\gamma = 0$ ein ganzes Kontinuum von Werten zwischen dem genannten Grenzwert und ∞ annehmen können.

Unter Berücksichtigung dieser Tatsache sieht man sofort, daß die letzte Gleichung erfüllt ist für beliebige Werte von r zwischen 0 und N . Die beiden ersten Gleichungen geben $r(T)$ und damit die Magnetisierungsfunktion $(N - 2r) \mu$, die an Hand einer graphischen Darstellung erläutert sei (siehe

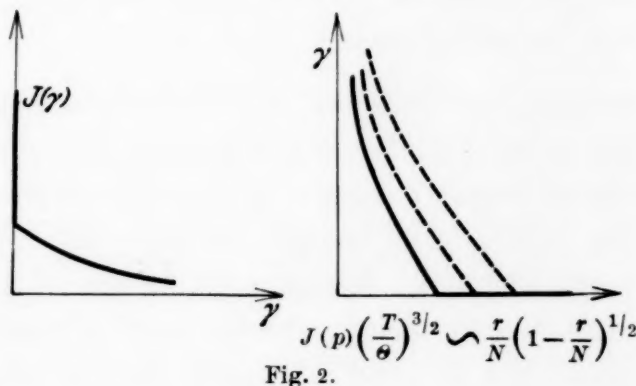


Fig. 2.

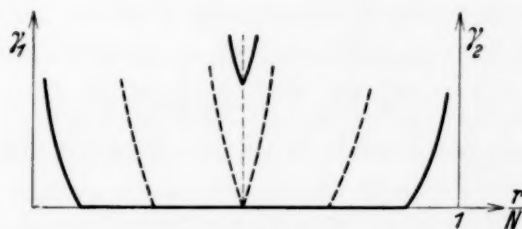


Fig. 3.

Fig. 3). In Fig. 3 ist auf der linken Seite gemäß der ersten Gleichung γ als Funktion von r aufgetragen für verschiedene Werte von T , wie es sich durch Vermittlung der Fig. 2 ergibt; auf der rechten Seite der Fig. 3 ist γ als Funktion von $N - r$ aufgetragen durch Spiegelung der ersten Funktion an $r = N/2$, wie es aus der zweiten Gleichung hervorgeht. Da bei vor-

gegebenem T/Θ zwei Gleichungen zwischen γ und r zu erfüllen sind, liefert der Schnittpunkt beider Kurven das gesuchte γ und r ; man sieht, daß innerhalb eines gewissen Temperaturgebietes der „Schnittpunkt“ der beiden Kurven hier eine Gerade auf der r -Achse ist; dies bedeutet, daß in diesem Falle die Magnetisierung zwischen $(N/2 - r)$ und $(-N/2 + r)$ jeden Wert annehmen kann, da kein äußeres Magnetfeld vorhanden ist, welches eine Magnetisierungsrichtung bevorzugt. Mit wachsender Temperatur wird die Länge der Schnittgeraden immer kleiner werden. Von einem bestimmten Temperaturpunkt an aber ergibt sich ein wirklicher

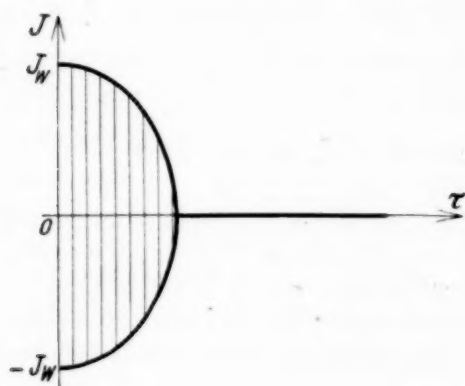


Fig. 4.

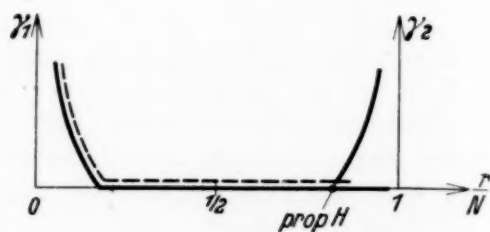


Fig. 5.

Schnittpunkt zwischen den beiden Kurven, der bei $r = N/2$ liegt, also auf jeden Fall die Magnetisierung Null ergibt (siehe Fig. 3). Das erste der genannten Temperaturintervalle entspricht also dem Gebiet unterhalb, das zweite dem Gebiet oberhalb des ferromagnetischen Curie-Punktes [siehe Fig. 4¹]. Wird nun ein kleines äußeres Magnetfeld hinzugefügt, so unterscheiden sich γ_1 und γ_2 gemäß der dritten Gleichung um eine kleine Größe, die in erster Näherung proportional H ist. Je nachdem die Feldrichtung in die Richtung der Rechts- oder Linksspine fällt, ist γ_1 (γ_2) = 0 und γ_2 (γ_1) proportional H zu setzen. Sucht man die analoge Darstellung, die für $H = 0$ in Fig. 3 dargestellt ist, so müssen jetzt die γ_1 — (bzw. γ_2 —) Kurven gezeichnet werden. Es muß also die eine der beiden Kurven in

¹) In diesem Schema besteht eine gewisse Analogie zwischen ferromagnetischem Curiepunkt einerseits und kritischer Temperatur andererseits. Ersterer ist charakteristisch für den Übergang vom ferro- zum paramagnetischen Gebiet, letzterer für den Übergang von der Flüssigkeit zur Dampfphase, der bekanntlich durch die van der Waalssche Zustandsgleichung besonders gut erfaßt wird. Unterhalb der kritischen Temperatur findet sich je nach den äußeren Bedingungen ein verschiedenes Verhältnis der beiden Phasen „gasförmig-flüssig“; unterhalb des Curiepunktes findet sich je nach der Richtung des Magnetfeldes ein verschiedenes Verhältnis der beiden Phasen „Rechtsspine—Linksspine“.

Fig. 3 um ein kleines Stück proportional H vertikal verschoben werden, infolgedessen ergibt sich ein definierter Schnittpunkt der beiden Kurven auf der linken oder rechten Seite der Figur, der ganz nahe bei den Extremwerten $(N/2 - r)$ und $(-N/2 + r)$ liegt (siehe Fig. 5). Diese Extremwerte sind naturgemäß Funktionen von T und H und bilden die Magnetisierungskurve unterhalb des Curie-Punktes.

Für die tiefsten Temperaturen ergibt sich aus den ersten beiden Gleichungen, da dort $r \ll N$ gesetzt werden kann, $\frac{r}{N}$ (bzw. $\frac{N-r}{N}$) proportional $(T/\Theta)^{3/2}$, also für die Magnetisierung dasselbe $T^{3/2}$ -Gesetz wie bei Bloch.

Mit zunehmender Temperatur tritt eine weitere monotone Abnahme der Magnetisierung ein, die schließlich am ferromagnetischen Curie-Punkt verschwindet.

§ 4. Um die Magnetisierung in der Nähe des Curie-Punktes quantitativ diskutieren zu können, müssen die bei tiefen Temperaturen gemachten Einschränkungen fallen gelassen und die ursprünglichen Gleichungen erörtert werden. Der ferromagnetische Curie-Punkt Θ_f ist nach dem oben Gesagten in den Gleichungen (16), (16a) und Fig. 3 dadurch charakterisiert, daß für $H = 0$ noch $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, aber schon $r = N/2$ ist.

Diese Behauptung, die an Hand der graphischen Darstellung für die verkürzten Gleichungen (16) aufgestellt wurde, mußte erst an den ausführlichen Gleichungen (3) nachgewiesen werden. Denn es wäre ja an sich denkbar, daß die drei Gleichungen (3) an dem genannten Temperaturpunkt Θ_f außer der Lösung $r = N/2$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ noch weitere Lösungen mit $r \neq N/2$ und $\gamma_i \neq 0$ besitzen könnten; dann aber würde die eben definierte Temperatur nicht mehr der ferromagnetische Curie-Punkt sein, der erst bei einer höheren Temperatur erreicht würde, bei der schließlich alle Schnittpunkte bei $r = N/2$ zusammenrücken würden, so daß erst dann die wirklich beobachtete Magnetisierung verschwände. Im Anhang wird nun ausführlich gezeigt, daß die genannte Lösung bei $T = \Theta_f$, $r = N/2$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ wirklich die einzige Lösung der drei transzendenten Gleichungen ist. Man kann also am Curie-Punkt und überall unterhalb des Curie-Punktes $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ setzen; damit ist die dritte der Bestimmungsgleichungen automatisch erfüllt, und es brauchen zur Bestimmung des Magnetisierungsverlaufs nur noch die ersten beiden Gleichungen diskutiert werden.

In der Umgebung unterhalb des Curie-Punktes muß man nach $r - N/2 = \varepsilon$ und $\Theta_f - T$ entwickeln. Bei dieser Entwicklung ist davon Gebrauch zu machen, daß die freie Energie für $H = 0$, Φ , wie aus (1) hervorgeht, die Gestalt hat:

$$\Phi(\gamma_1 \gamma_2 \varepsilon) = g(\gamma_1, \varepsilon) + g(\gamma_2, -\varepsilon).$$

Infolgedessen lassen sich die beiden noch übrigbleibenden Bestimmungs-
gleichungen, wenn man $\frac{\varepsilon}{N} = \eta$ und $\frac{\Theta_f - T}{\Theta_f} = \vartheta$ einführt, schreiben in
der Form:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_1} = 0 &= \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_1} \right)_{\substack{\gamma_i = 0 \\ \eta = 0 \\ T = \Theta_f}} + \eta \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_1 \partial \eta} \right) + \frac{1}{2} \eta^2 \left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial \gamma_1 \partial \eta^2} \right) + \vartheta \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_1 \partial \vartheta} \right) \\ &\quad + \eta \vartheta \left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial \gamma_1 \partial \eta \partial \vartheta} \right) + \frac{1}{2} \vartheta^2 \left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial \gamma_1 \partial \vartheta^2} \right) + \dots \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_2} = 0 &= \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_2} \right)_{\substack{\gamma_i = 0 \\ \eta = 0 \\ T = \Theta_f}} - \eta \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_1 \partial \eta} \right) + \frac{1}{2} \eta^2 \left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial \gamma_1 \partial \eta^2} \right) + \vartheta \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_1 \partial \vartheta} \right) \\ &\quad - \eta \cdot \vartheta \cdot \left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial \gamma_1 \partial \eta \partial \vartheta} \right) + \frac{1}{2} \vartheta^2 \left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial \gamma_1 \partial \vartheta^2} \right) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Da für $T = \Theta_f$: $\eta = 0$ ist, muß gelten:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_1} \right)_{\substack{\eta = 0 \\ \gamma = 0}} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_2} \right) = \left(\frac{\partial g}{\partial \gamma} \right)_{\substack{\eta = 0 \\ \gamma = 0}} = 0, \quad (18)$$

was die Bestimmung des ferromagnetischen Curie-Punktes Θ_f liefert. Zur
Bestimmung von Θ_f ergibt sich also nach (3):

$$\frac{1}{\pi^{1/3}} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{d\xi d\eta d\zeta}{e^{\frac{4\Theta}{\Theta_f} [\sin^2 \xi + \sin^2 \eta + \sin^2 \zeta]} - 1} - 1 = 0. \quad (19)$$

Wie im Anhang ausführlich gezeigt wird, ergibt sich hieraus als Wurzel

$$\frac{\Theta_f}{\Theta} = 2,8.$$

In (17) müssen ebenso wie die ersten Glieder auch die Summen der
übrigen Glieder verschwinden. In der Nachbarschaft des Curie-Punktes
könnte man daran denken, nur die niedrigsten, linearen Potenzen in η
und ϑ zu berücksichtigen. Dann müßte gleichzeitig erfüllt sein:

$$\text{nach (17}_1\text{):} \quad \eta = \vartheta \frac{\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_1 \partial \vartheta} \right)}{\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_1 \partial \eta} \right)} \quad (20_1)$$

$$\text{nach (17}_2\text{):} \quad \eta = \vartheta \frac{\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_1 \partial \vartheta} \right)}{\left(-\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_1 \partial \eta} \right)} \quad (20_2)$$

Der Koeffizient von ϑ müßte also in (20₁) und (20₂) denselben Wert haben; außerdem müßte er, wie bereits für tiefe Temperaturen auf S. 752 auseinandergesetzt ist, zwischen zwei Extremwerten das ganze Kontinuum von Zwischenwerten annehmen können (siehe Fig. 6). Um nachzuprüfen, ob diese Forderung erfüllbar ist, muß man zusehen, welchen Wertebereich die beiden Differentialquotienten für $\gamma = 0$ annehmen. Es ist:

$$(17) \quad \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_1 \partial \vartheta} \right]_{\substack{\gamma=0 \\ \eta=0 \\ T=\Theta_f}} \sim -\frac{1}{\pi^3} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi e^{\frac{\gamma + \frac{4\Theta}{\Theta_f} [\sin^2 \xi + \sin^2 \eta + \sin^2 \zeta]^{\frac{1}{2}}}{\left(e^{\frac{\gamma + \frac{4\Theta}{\Theta_f} [\sin^2 \xi + \sin^2 \eta + \sin^2 \zeta]^{\frac{1}{2}}} - 1 \right)^2}} \frac{2\Theta}{\Theta_f} \cdot (21)$$

$$\left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_1 \partial \eta} \right]_{\substack{\gamma=0 \\ \eta=0 \\ T=\Theta_f}} \sim \frac{1}{\pi^3} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi e^{\frac{\gamma + \frac{4\Theta}{\Theta_f} [\sin^2 \xi + \dots]^{\frac{1}{2}}}{\left[e^{\frac{\gamma + \frac{4\Theta}{\Theta_f} [\sin^2 \xi + \dots]^{\frac{1}{2}}} - 1 \right]^2}} [\sin^2 \xi + \dots] \cdot 4\Theta - 4. \quad (22)$$

Wenn man sich von positiven Werten aus $\gamma = 0$ nähert sowie $T = \Theta_f$, $\eta = 0$, streben die Integrale gegen die Grenzwerte: (21) $\rightarrow -1,4$; (22) $\rightarrow 2,7 - 4$, wie im Anhang ausführlich gezeigt wird. Nähert man sich von negativen Werten aus $\gamma = 0$, so werden beide Integrale wegen der oben besprochenen Singularität divergieren. Also wird das ganze Wertekontinuum $-1,4 \dots -\infty$ für (21) und $-1,3 \dots +\infty$ für (22) angenommen. Mit- hin hat der Quotient der Differentialquotienten, der den Koeffizienten von ϑ ausmacht, den Wertebereich $-\infty$ bis -0 und $+1$ bis

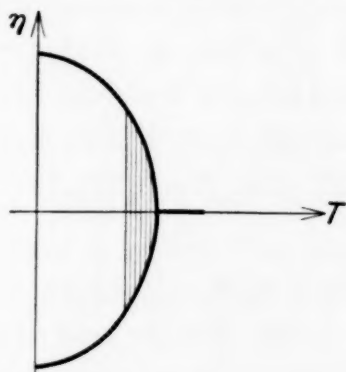


Fig. 6.

$+\infty$, hingegen fehlt in diesem Kontinuum der Bereich von $+1$ bis 0 . Da also der Koeffizient von ϑ das verlangte Wertekontinuum nicht annehmen kann, muß die Grundannahme unzulässig sein, und es müssen höhere Potenzen, insbesondere die quadratische Potenz von η in unsere Betrachtung hinzugenommen werden. Dann ist es zur Kompatibilität der oberen und unteren Gleichung notwendig, daß die Glieder

$$\eta \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_1 \partial \eta} + \eta \cdot \vartheta \cdot \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \gamma_1 \partial \eta \partial \vartheta}$$

verschwinden, oder daß

$$\vartheta = -\frac{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_1 \partial \eta}}{\frac{\partial^3 \Phi}{\partial \gamma_1 \partial \eta \partial \vartheta}}$$

ist für kleine Werte von ϑ . Dieser Quotient muß also ein Kontinuum von Werten zwischen 0 und einem kleinen positiven Grenzwert annehmen können. Diese Forderung ist infolge des oben besprochenen singulären Verhaltens der Differentialquotienten bei $\gamma = 0$ durchaus erfüllbar. Denn der Zähler des Quotienten kann, wie erwähnt, z. B. den Wertebereich $+1,3$ bis $-1,3$ haben, während der Nenner analog von einem endlichen Grenzwert bis ∞ laufen kann; ferner wird der Nenner bei $\gamma = 0$ mit einer höheren, der dritten Potenz divergieren wie der Zähler.

Somit müssen wir setzen:

$$\eta^2 = \vartheta \cdot 2 \cdot \frac{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_1 \partial \eta^2}}{\frac{\partial^3 \Phi}{\partial \gamma_1 \partial \eta^2}}$$

Dies bedeutet ein senkrechtes Einlaufen der Magnetisierungskurve am ferromagnetischen Curie-Punkt. Bezüglich des Koeffizienten von ϑ in (23) ist zu verlangen, daß er, gemäß der Fig. 6, ein Wertekontinuum von 0 bis zu einem positiven noch zu berechnenden Grenzwert durchläuft. Dies ist erfüllbar, da Zähler und Nenner des Quotienten positive Größen sind und bei $\gamma = 0$ mit der zweiten bzw. dritten Potenz divergieren. Der Nenner hat am Curie-Punkt (siehe Anhang) den Wert $+7,2$, es ergibt sich also mit dem Wert (21) für den Zähler:

$$\eta = \sqrt{\vartheta} \cdot p, \quad (24)$$

wo $p = 0 \dots 0,65$ ist.

Mit diesem senkrechten Verlauf der Magnetisierungskurve ist man in guter Übereinstimmung mit den Meßergebnissen (siehe J. H. van Vleck, *The theory of electric and magnetic susceptibilities*, Oxford 1932) und mit der Weiss'schen Theorie.

Was die experimentell gemessene Temperaturdifferenz $\Theta_p - \Theta_f$ anlangt, so ergeben sich nach Forrer je nach dem Material Werte zwischen 15° bis 40° ; theoretisch erhält man, da $3\Theta \sim 1000^\circ$ sein soll, für dieselbe Temperaturdifferenz ungefähr 65° , was als befriedigende Übereinstimmung angesehen werden kann.

Schließlich sei noch der Verlauf der Suszeptibilität im Temperaturgebiet der Curie-Punkte berechnet¹⁾. In die Formel (8) müssen die numerischen Werte der Differentialquotienten $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2}$, $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma^2}$ und $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma \partial \eta}$ an dem be-

¹⁾ Für die Durchführung dieser numerischen Rechnung habe ich Herrn cand. phil. Oertel zu danken.

trachteten Temperaturpunkt eingesetzt werden. Hierbei ist zu berücksichtigen, daß in den Differentialquotienten sowohl $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_0$ wie auch T vorkommt, wobei γ_0 und T durch die Relation $\frac{\partial \Phi(\gamma_0, T)}{\partial \gamma} = 0$ ver-

bunden sind. Am ferromagnetischen Curie-Punkt selbst ergibt sich per Definitionen, daß $\gamma_0 = 0$ ist für $T = \Theta_f$; am paramagnetischen Curie-Punkt, der bei $\Theta_p = 3\Theta$ liegt, ergibt die Bedingungsgleichung $\gamma_0 = 0,004$. Mit diesen Werten für γ_0 und Θ_p ergibt sich an den beiden Curie-Punkten:

$$\left. \begin{aligned} \text{für } \Theta_f = 2,8\Theta: \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma^2} &= -\infty, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} = +0,65, \\ \text{für } \Theta_p = 3\Theta: \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma^2} &= -11, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} = +0,6, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma \partial \eta} = -0,7. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Für die Suszeptibilität läßt sich schreiben, nach Division von Zähler und Nenner durch $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma^2}$:

$$\chi = \frac{4\mu^2 N}{kT} \cdot \frac{1}{\left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta \partial \gamma} \right)^2}{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma^2}} \right]}. \quad (26)$$

Am ferromagnetischen Curie-Punkt kann im Nenner der zweite Summand gegen den ersten vernachlässigt werden, der erste Summand ergibt (siehe Anhang) wegen der oben besprochenen Singularität bei $\gamma = 0$ den Wertebereich $+0,7 \dots +\infty$.

Also erhält man

$$\chi_{\Theta_f} \sim \frac{N\mu^2}{k\Theta} \cdot q_f,$$

wo $q_f = 2,9 \dots \infty$ ist (siehe Fig. 7).

Am paramagnetischen Curie-Punkt ergibt sich:

$$\chi_{\Theta_p} \sim \frac{N\mu^2}{k\Theta} \cdot q_p,$$

wo $q_p = 2,2$ ist. Trägt man also wie üblich $1/\chi$ als Funktion von T auf (siehe Fig. 7), so ergibt sich ein langsamer Anstieg von $1/\chi$ bereits vom ferromagnetischen zum paramagnetischen Curie-Punkt, wie sich auch durch Berechnung des Tangentenwinkels von χ bei Θ_f direkt zeigen läßt.

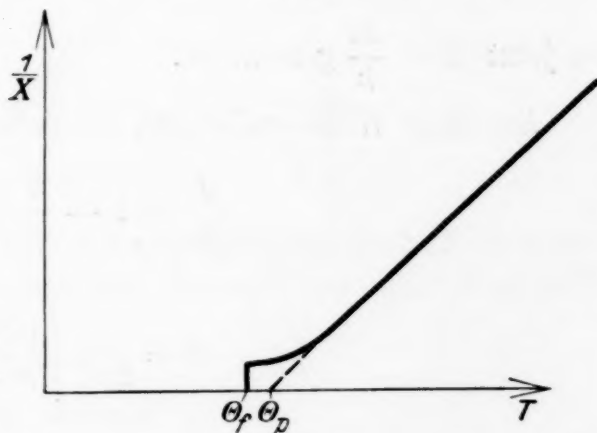


Fig. 7.

Experimentell dürfte die reziproke Suszeptibilität bei Θ , direkt verschwinden.

§ 5. Diese Überlegungen sollen nun noch auf den Fall mehrerer (z) Elektronen pro Atom ausgedehnt werden. Wie die Untersuchung von Møller¹⁾ zeigt, lassen sich hier die Energien einer Spinnmolekel schreiben in der Form

$$\varepsilon_{klm} = z \cdot I \cdot (k^2 + l^2 + m^2) \frac{4\pi^2}{G^2}.$$

Die freie Energie unseres Problems nimmt dann folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} F = \frac{1}{2} k T \left\{ \left(1 - \frac{r}{Nz}\right) \sum_{klm} \ln \left(1 - e^{-\gamma_1 - \frac{zI}{kT} (k^2 + l^2 + m^2) \frac{4\pi^2}{G^2} \left(1 - \frac{r}{Nz}\right)}\right) \right. \\ \left. - \gamma_1 \cdot r \right. \\ \left. + \frac{r}{Nz} \sum_{klm} \ln \left(1 - e^{-\gamma_2 - \frac{zI}{kT} (k^2 + l^2 + m^2) \frac{4\pi^2}{G^2} \cdot \frac{r}{Nz}}\right) \right. \\ \left. - \gamma_2 (Nz - r) \right\} \\ + 2\mu \left(\frac{Nz}{2} - r\right) H, \end{aligned} \quad (27)$$

und die Gleichung (19) sieht jetzt folgendermaßen aus:

$$\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{\pi^3} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{d\xi d\eta d\zeta}{e^{\frac{4\Theta}{\Theta_f} [\sin^2 \xi + \sin^2 \eta + \sin^2 \zeta]} \left(\frac{1}{2}\right) - 1} = 1, \quad (28)$$

wo jetzt $\Theta = \frac{zI}{k}$ gesetzt ist.

Auf diese Weise ergibt sich für tiefe Temperaturen hier:

$$\frac{J}{J_0} = 1 - \frac{d}{z} \left(\frac{T}{\Theta}\right)^{3/2}, \quad (29)$$

wo

$$d = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{\sqrt{u} du}{e^u - 1}$$

ist.

Da der paramagnetische Curie-Punkt allgemein definiert ist durch

$$\Theta_{\text{par}} = \frac{Iz(z+2)}{k},$$

¹⁾ C. Møller, ZS. f. Phys. **82**, 559, 1933.

kann man auch schreiben:

$$\frac{J}{J_0} = 1 - \frac{d}{z} (z + 2)^{3/2} \left(\frac{T}{\Theta_{\text{par}}} \right)^{3/2}. \quad (29a)$$

Demnach rückt die ganze Magnetisierungskurve nach rechts. Für die Berechnung des ferromagnetischen Curie-Punktes ergibt sich nunmehr aus (28):

$$\frac{\Theta_f}{\Theta_p} \sim \frac{(2z + 1)}{(z + 2) 1,01} - \frac{1}{2} \frac{1}{(z + 2)^2} + \dots \quad (30)$$

Dies gibt für $z = 1$, wie oben:

$$\frac{\Theta_f}{\Theta_p} \sim 0,95,$$

für $z = 2$ aber:

$$\frac{\Theta'_f}{\Theta'_p} \sim 1,2.$$

Für zwei Elektronen pro Atom liegt der ferromagnetische also bereits rechts vom paramagnetischen Curie-Punkt (siehe Fig. 8).

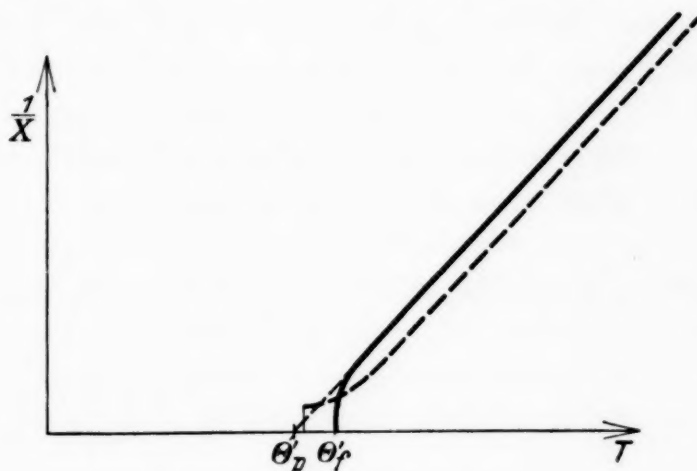


Fig. 8.

Über den genauen Verlauf der Magnetisierungskurven im Falle mehrerer Elektronen pro Atom und verschiedener Gitterformen oder Nachbarnzahlen wird demnächst berichtet.

§ 6. Anhang.

1. zu S. 753. Es soll hier der Nachweis erbracht werden, daß die drei Bedingungsgleichungen (3) für den im Text angegebenen Temperaturpunkt Θ_f , der durch $r = N/2, \gamma_1 = \gamma_2 = 0$ charakterisiert ist, keine weiteren Lösungen $r \neq N/2, \gamma_1 = \gamma_2 \neq 0$ besitzt. Denn durch eine solche weitere Lösung würde die Bedeutung von Θ_f als ferromagnetischem Curie-Punkt

zunichte, der ja gerade durch die alleinige Lösung $J = 0$, d. h. $r = N/2$ definiert ist. Vielmehr würde dann der wirkliche ferromagnetische Curie-Punkt erst bei einer höheren Temperatur erreicht werden, bei der dann alle Lösungen in die eine Lösung $r = N/2$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ zusammenrücken würden. Da die Nichtexistenz einer weiteren Lösung $r \neq N/2$, $\gamma_i \neq 0$ für die Gleichungen (3) auf direktem Wege schwer zu beweisen ist, soll ein indirekter Weg eingeschlagen werden. Aus den Gleichungen (3) können bei vorgegebenem $T \geq \Theta_f$ und $H = 0$ zwei Funktionen $(\gamma_1 - \gamma_2)/2 = \delta_i$ als Funktionen von $(r - N/2) = \varepsilon$ berechnet werden, die, wie erwähnt, bei $\varepsilon = 0$, $\delta_i = 0$ sicher einen Schnittpunkt haben; für die beiden $\delta_i(0)$ können somit auch die Tangentenwinkel, c_i , im Schnittpunkt angegeben werden. Nun werden die Tangentenwinkel c_i der beiden δ -Kurven sich mit wachsender Temperatur ändern, $c_i(T)$; stets aber wird für $\varepsilon = 0$, sowohl δ_1 wie δ_2 verschwinden. Wenn nun die beiden δ -Kurven außer für $\varepsilon = 0$, $\delta_i = 0$ noch weitere Schnittpunkte besitzen würden, so müßten diese bei einer höheren Temperatur, dem wirklichen Curie-Punkt, zusammenrücken; bei dieser Temperatur würde $c_1(T) = c_2(T)$ sein. Es soll nun im folgenden gezeigt werden, daß für alle $T \geq \Theta_f$ $c_1(T) \neq c_2(T)$ ist. Zu diesem Zweck werden die Gleichungen (3) nach η und δ entwickelt; anstatt $\delta = (\gamma_1 - \gamma_2)/2$ wird zunächst $(\gamma_1 - \gamma_0)$ und $(\gamma_2 - \gamma_0)$ als Entwicklungsparameter gewählt, wo $\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2$ für $\eta = 0$ ist bei vorgegebenem T ; bei $T = \Theta_f$ ist $\gamma_0 = 0$. Auf diese Weise erhält man aus den Gleichungen (3):

$$\frac{\partial F}{\partial \gamma_1} = 0 = f(\eta, \gamma_1) = f(0, \gamma_0) + (\gamma_1 - \gamma_0) \left(\frac{\partial f(\eta, \gamma_1)}{\partial \gamma_1} \right)_{\substack{\eta=0 \\ \gamma_i=\gamma_0}} + \eta \left(\frac{\partial f(\eta, \gamma_1)}{\partial \eta} \right)_{\substack{\eta=0 \\ \gamma_i=\gamma_0}}, \quad (\text{I})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \gamma_2} = 0 = f(-\eta, \gamma_2) = f(0, \gamma_0) + (\gamma_2 - \gamma_0) \left(\frac{\partial f(-\eta, \gamma_2)}{\partial \gamma_2} \right)_{\substack{\eta=0 \\ \gamma_i=\gamma_0}} \\ + \eta \left(\frac{\partial f(-\eta, \gamma_2)}{\partial \eta} \right)_{\substack{\eta=0 \\ \gamma_i=\gamma_0}}. \end{aligned} \quad (\text{II})$$

Da für $\eta = 0$ auch $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_0$ ist, muß dann $f(0, \gamma_0, T) = 0$ sein; hieraus ergibt sich zur Bestimmung von Θ_f :

$$f(0, 0, \Theta_f) = 0. \quad (\text{IIa})$$

Ferner ergibt sich durch Subtraktion der beiden Gleichungen:

$$\gamma_1 - \gamma_2 = 2\delta_1 = -2\eta \frac{\partial f / \partial \eta}{\partial f / \partial \gamma} \text{ oder } \delta_1 = \varepsilon \cdot c_1, \quad (\text{A})$$

wo $c_1 = -\frac{\partial f / \partial \eta}{\partial f / \partial \gamma}$ ist.

Die dritte Bestimmungsgleichung hat, wie man aus (3) sieht, folgende Gestalt:

$$\frac{\partial F}{\partial \eta} = 0 = f_1(\eta \gamma_1) + f_2(\eta \gamma_1) - f_1(-\eta \gamma_2) - f_2(-\eta \gamma_2), \quad (\text{III})$$

und nach η und $(\gamma_1 - \gamma_0)$ und $(\gamma_2 - \gamma_0)$ entwickelt:

$$0 = f_1(0, \gamma_0) + \eta \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \eta} + (\gamma_1 - \gamma_0) \frac{\partial f_1}{\partial \gamma_1} + f_2(0, \gamma_0) + \eta \frac{\partial f_2}{\partial \eta} + (\gamma_1 - \gamma_0) \frac{\partial f_2}{\partial \gamma_1},$$

$$- f_1(0, \gamma_0) + \eta \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \eta} - (\gamma_2 - \gamma_0) \frac{\partial f_1}{\partial \gamma_2} - f_2(0, \gamma_0) + \eta \frac{\partial f_2}{\partial \eta} - (\gamma_2 - \gamma_0) \frac{\partial f_2}{\partial \gamma_2},$$

wobei wieder

$$- \eta \cdot \left(\frac{\partial f_1(-\eta, \gamma_1)}{\partial \eta} \right) = \eta \cdot \left(\frac{\partial f_1(\eta, \gamma_1)}{\partial \eta} \right)$$

gesetzt werden kann. Hieraus folgt:

$$2\eta \left(\frac{\partial f_1}{\partial \eta} + \frac{\partial f_2}{\partial \eta} \right) = -(\gamma_1 - \gamma_2) \left(\frac{\partial f_1}{\partial \gamma} + \frac{\partial f_2}{\partial \gamma} \right); \quad \delta_2 = \eta \cdot c_2, \quad (\text{B})$$

$$\text{wo } c_2 = - \left[\frac{\frac{\partial f_1}{\partial \eta} + \frac{\partial f_2}{\partial \eta}}{\frac{\partial f_1}{\partial \gamma} + \frac{\partial f_2}{\partial \gamma}} \right]_{\substack{\eta=0 \\ \gamma_1=\gamma_0}} \text{ ist.}$$

Die beiden Tangentenwinkel c_1 und c_2 sind nun aber, wie sich aus (A) und (B) ergibt, Funktionen von T und γ_0 ; durch (IIa) wird für vorgegebenes T das zugehörige γ_0 berechnet, für $T = \Theta_f$ ergibt sich hieraus $\gamma_0 = 0$. Es müssen nun also zur Bestimmung von c_1 und c_2 die sechs angegebenen Differentialquotienten berechnet werden; dies soll geschehen für $T = \Theta_f$ und $T = \infty$. Zu diesem Zweck seien die speziellen Formen der Funktionen $f(\eta, \gamma)$, $f_1(\eta \gamma)$ und $f_2(\eta, \gamma)$ angegeben. Es ist:

$$f(\eta \gamma) = \frac{1}{\pi^3} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{d\xi d\eta d\zeta}{e^{\gamma + \frac{4\Theta}{T} [\sin^2 \xi + \dots] (1/2 - \eta)} - 1} - 1 - 4\eta, \quad (\text{IV})$$

$$f_1(\eta \gamma) = - \frac{1}{\pi^3} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi d\xi d\eta d\zeta \ln \left(1 - e^{-\gamma - \frac{4\Theta}{T} [\sin^2 \xi + \dots] (1/2 - \eta)} \right), \quad (\text{V})$$

$$f_2(\eta \gamma) = - \left(\frac{1}{2} - \eta \right) \frac{1}{\pi^3} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi d\xi d\eta d\zeta$$

$$\cdot \frac{4\Theta}{T} [\sin^2 \xi + \dots] \frac{1}{e^{\gamma + \frac{4\Theta}{T} [\sin^2 \xi + \dots] (1/2 - \eta)} - 1} - \gamma. \quad (\text{VI})$$

Hieraus lassen sich die sechs Differentialquotienten auf dem unter 2. angegebenen Wege durch Reihenentwicklung berechnen; es ist:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)_{\substack{\gamma = \gamma_0 \\ \eta = 0}} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\gamma_0 - 3n\frac{\Theta}{T}} \{iJ_1 J_0^2 + J_0^3\} \frac{6n\Theta}{T} - 4,$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \gamma}\right)_{\substack{\gamma = \gamma_0 \\ \eta = 0}} = \sum_{n=1}^{\infty} -n \cdot e^{-n\gamma_0 - 3n\frac{\Theta}{T}} \cdot J_0^3 \left(n\frac{\Theta}{T}i\right),$$

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial \eta}\right)_{\substack{\gamma = \gamma_0 \\ \eta = 0}} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\gamma_0 - 3n\frac{\Theta}{T}} \{iJ_1 \cdot J_0^2 + J_0^3\} \frac{6\Theta}{T},$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f_2}{\partial \eta}\right)_{\substack{\gamma = \gamma_0 \\ \eta = 0}} &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\gamma_0 - 3n\frac{\Theta}{T}} \left\{ (iJ_1 J_0^2 + J_0^3) \frac{6\Theta}{T} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \frac{6n\Theta^2}{T^2} (12iJ_1 J_0^2 + 7J_0^3 - J_0^2 J_2 - 4J_1^2 J_0) \right\}. \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial \gamma}\right)_{\substack{\gamma = \gamma_0 \\ \eta = 0}} = -f(0, \gamma_0) - 1,$$

$$\left(\frac{\partial f_2}{\partial \gamma}\right)_{\substack{\gamma = \gamma_0 \\ \eta = 0}} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\gamma_0 - 3n\frac{\Theta}{T}} \{iJ_1 J_0^2 + J_0^3\} \frac{6n\Theta}{T} - 1.$$

Die numerischen Werte dieser sechs Funktionen und damit von c_1 und c_2 wurden für $T = \Theta_f$ und $T = \infty$ nach der unter 2. angegebenen Methode berechnet und sind in Tabelle 1 angegeben.

Diese Tabelle der Differentialquotienten zeigt, daß c_1 negativ ist, c_2 positiv ist im Temperaturintervall $T = \Theta_f \dots \infty$; dieses Resultat wurde

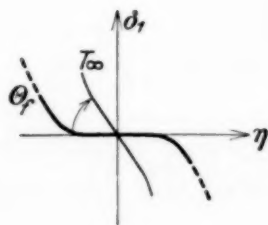


Fig. 9.

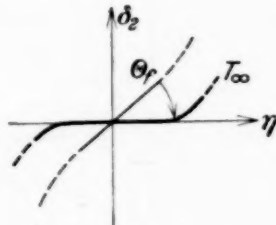


Fig. 10.

durch einige Abschätzungen für die Werte innerhalb des Temperaturintervalls bestätigt. Dieses Verhalten von δ_1 und δ_2 als Funktion von η ist in den Fig. 9 und 10 dargestellt; es ist also außer bei $\delta_1 = \delta_2 = 0$, $\eta = 0$ kein weiterer Schnittpunkt zwischen δ_1 und δ_2 zu erwarten.

Tabelle 1.

Differentialquotient	Θ_f	T_∞
$\frac{\partial f}{\partial \eta}$	- 1,3	- 4
$\frac{\partial f}{\partial \gamma}$	- ∞	- 2
c_1	- 0	- 2
$\frac{\partial f_1}{\partial \eta}$	+ 1,15	$+\frac{6\Theta}{T}$
$\frac{\partial f_2}{\partial \eta}$	$+ 1,15 - 1,65 = - 0,5$	$+\frac{6\Theta}{T} - \dots$
Z	+ 0,65	$+\frac{12\Theta}{T} - \dots$
$\frac{\partial f_1}{\partial \gamma}$	- 1	- 1
$\frac{\partial f_2}{\partial \gamma}$	$- 1 + 1,35 = + 0,35$	$- 1 + \frac{3\Theta}{T}$
N	- 0,65	$- 2 + \frac{3\Theta}{T}$
c_2	+ 1	$+\frac{6\Theta}{T}$

2. zu S. 755, 756. Zur Berechnung des Magnetisierungsverlaufs unterhalb des ferromagnetischen Curie-Punktes müssen die Werte folgender Funktionen berechnet werden:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \gamma}\right)_{\gamma=0} &\sim \frac{1}{\pi^3} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{d\xi d\eta d\zeta}{e^{\frac{4\Theta}{T} [\sin^2 \xi + \dots] (1/2 - \eta)} - 1} - 1 - 4\eta \\ &= \frac{1}{\pi^3} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi d\xi d\eta d\zeta \cdot e^{-\frac{4\Theta}{T} [\sin^2 \xi + \dots] (1/2 - \eta)} \left\{ 1 + e^{-\frac{4\Theta}{T} [\sin^2 \xi + \dots] (1/2 - \eta)} \right. \\ &\quad \left. + e^{-\frac{8\Theta}{T} [\sin^2 \xi + \dots] (1/2 - \eta)} + \dots \right\} - 1 - 4\eta \\ &= \sum_{n=1}^\infty e^{-\frac{n \cdot 2\Theta \cdot 3}{T} (1/2 - \eta)} \cdot \left[\frac{1}{\pi} \int_0^\pi dy \cdot e^{n \cdot \frac{2\Theta}{T} \cdot \cos y (1/2 - \eta)} \right]^3 - 1 - 4\eta \\ &= \sum_{n=1}^\infty e^{-\frac{6n\Theta}{T} (1/2 - \eta)} \cdot J_0^3 \left(n \cdot \frac{2\Theta}{T} \left(\frac{1}{2} - \eta \right) i \right) - 1 - 4\eta. \end{aligned}$$

Wie auf S. 754 gezeigt, muß

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \gamma}\right)_{\substack{\gamma_0 = 0 \\ \eta = 0 \\ T = \Theta_f}} = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-3n \frac{\Theta}{\Theta_f}} \cdot J_0^3 \left(n \frac{\Theta}{\Theta_f} i\right) - 1$$

sein. Die Summe wurde von $n = 1$ bis 6 ausgewertet unter Benutzung der bei Jahnke-Emde tabulierten Bessel-Funktionen; die Restsumme wurde abgeschätzt durch Integration über die Bessel-Funktionen in asymptotischer Darstellung. Auf diese Weise ergibt sich als Wurzel der obigen Gleichung $\Theta/\Theta_f \sim 0,36$ oder $\Theta_f \sim 2,8 \Theta$. Durch Differentiation nach η ergibt sich aus der obigen Formel:

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma \partial \eta}\right)_{\substack{\eta = 0 \\ \gamma_0 = 0 \\ T = \Theta_f}} \sim \sum_{n=1}^{\infty} e^{-3n \frac{\Theta}{\Theta_f}} \{i J_1 \cdot J_0^2 + J_0^3\} \cdot 3n \frac{\Theta}{\Theta_f} \cdot 2 - 4.$$

Mit derselben Auswertungsmethode wie oben ergibt sich hier:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma \partial \eta} = 2,7 - 4 = -1,3.$$

Analog ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma \partial \vartheta} &= - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-3n \frac{\Theta}{\Theta_f}} \{i J_1 \cdot J_0^2 + J_0^3\} 3n \frac{\Theta}{\Theta_f} \\ &\sim -1,4. \end{aligned}$$

Durch nochmalige Differentiation ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \gamma \partial \eta^2} &= - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-3n \frac{\Theta}{\Theta_f}} \{7 J_0^3 + 12 i J_0^2 J_1 - 4 J_1^2 J_0 - J_0^2 J_2\} \frac{6 n^2 \Theta^2}{\Theta_f^2} \\ &\sim +7,2. \end{aligned}$$

Alle hier angeführten Integrale haben die angegebenen numerischen Werte als untere Grenze, da sie wegen der Singularität bei $\gamma = 0$ bei Annäherung von negativem γ aus divergieren.

Die vorliegende Untersuchung entstand im Anschluß an ein Seminar von Herrn Prof. W. Heisenberg, dem ich für die mannigfache Förderung, die er mir während meines Leipziger Aufenthaltes zuteil werden ließ, zu großem Dank verpflichtet bin; ferner möchte ich Herrn Prof. F. Hund und Herrn Dr. F. Bloch für vielfache Anregungen während dieser Zeit herzlich danken. Die Notgemeinschaft ermöglichte mir den Aufenthalt durch Gewährung eines Forschungsstipendiums.

Über die Stabilität der Ionengitter.

Von Gunnar Steensholt in Oslo.

Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 3. September 1934.)

Bei der exakten quantenmechanischen Behandlung von Molekülen bzw. Kristallen stößt man bekanntlich auf so große mathematische Schwierigkeiten, daß man wenigstens beim heutigen Stande unseres Wissens auf Näherungsmethoden angewiesen ist. Ein sehr interessantes Verfahren dieser Art haben Lenz¹⁾ und Jensen²⁾ ausgearbeitet, indem sie zeigten, wie man die Eigenschaften der Gitter mit edelgasartigen Ionen nach der Thomas-Fermischen statistischen Methode quantenmechanisch deuten kann. Wesentlich bei der Lenz-Jensenschen Methode ist, daß man der mathematisch sehr komplizierten Diskussion einer nichtlinearen Differentialgleichung durch Übergang zu einem entsprechenden Variationsprinzip und Anwendung der Ritzschen Methode aus dem Wege gehen kann.

Das Verfahren ist wohl nur für elektronenreiche Ionen verwendbar. Jensen wendet es auf RbBr an. Er setzt dabei den Gittertyp (NaCl-Typ) als bekannt voraus, und durch gewisse vereinfachende Annahmen gelingt es ihm, das Kristallproblem auf das Molekülproblem zurückzuführen. Die Gitterenergie wird durch den Ausdruck gegeben

$$u = -\frac{A e^2}{\delta} + p(W_2 + W_3 + W_4),$$

wo δ den Abstand zwischen benachbarten ungleichartigen Ionen bedeutet; p ist die Zahl der ungleichartigen Nachbarn eines hervorgehobenen Ions. A ist die Madelungsche Konstante, und W_2, W_3, W_4 sind gewisse Funktionen von δ , die sich auf numerischem Wege ermitteln lassen.

Prinzipiell ist es natürlich möglich, den Gittertyp als unbekannt voranzusetzen, und dann von den in Frage kommenden Gittertypen festzustellen, welcher der stabilste ist. Eine erschöpfende Behandlung dieses Problems für alle Alkalihalogene ist zur Zeit wegen des Mangels an erforderlichem numerischen Material nicht möglich. Für das RbBr aber scheint es auf Grund der Jensenschen Rechnungen möglich zu sein, die Frage zu beantworten.

Für das RbBr sind folgende Typen³⁾ von Koordinationsgittern möglich:

1. NaCl-Typ: $p = 6, A = 1,748$.
2. CsCl-Typ: $p = 8, A = 1,762$.
3. a) Zinkblende-Typ $\left\{ \begin{array}{l} p = 4, A = 1,639. \\ \text{b) Wurtzit-Typ} \end{array} \right.$

¹⁾ W. Lenz, ZS. f. Phys. **77**, 713, 1932. — ²⁾ H. Jensen, ebenda, S. 722.

— ³⁾ Vgl. R. de L. Kronig, Handb. d. Phys. XXIV/2, S. 268ff., Berlin 1933.

Für den NaCl-Typ ist die Berechnung der Gitterenergie bereits vollständig von Jensen durchgeführt. Für die übrigen Typen dürfen wir ebenfalls

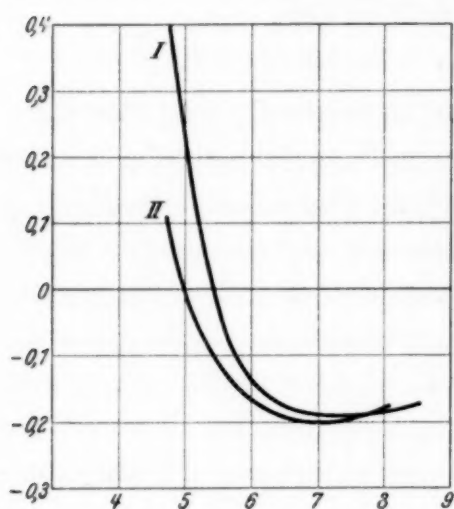


Fig. 1.

die obige Formel für die Gitterenergie verwenden, wenn wir im letzten Gliede nur die Wechselwirkung zwischen unmittelbar benachbarten ungleichartigen Ionen betrachten. Für den CsCl-Typ ergibt sich dabei das in Tabelle 1 gegebene Resultat. Für die beiden Typen 3a und 3b sind in dieser Näherung die Energiekurven nicht zu unterscheiden, da die Zahl der Nachbarn dieselbe und auch die Madelungschen Konstanten praktisch nicht zu unterscheiden sind (Tabelle 2).

In der Figur sind die beiden Energiekurven graphisch dargestellt. Beim Vergleich mit der Energiekurve des NaCl-Typs ergibt sich, daß diese dem tiefsten Wert der Gitterenergie entspricht. Beim RbBr wäre demnach der NaCl-Typ der stabilste, was ja auch mit der Erfahrung übereinstimmt.

Tabelle 1.

Energieeinheit wie bei Jensen (l. c.).

δ	$4 a_H$	$5 a_H$	$7 a_H$	$9 a_H$
u	+ 1,959	+ 0,234	- 0,188	- 0,186

Tabelle 2.

δ	$4 a_H$	$5 a_H$	$7 a_H$	$9 a_H$
u	+ 0,790	- 0,040	- 0,202	- 0,178

Auch bei den übrigen Alkalihalogenen können solche Betrachtungen durchgeführt werden. Verfasser hofft in demnächst erscheinenden Mitteilungen über weitere diesbezügliche Ergebnisse berichten zu können.

Blindern, V. Aker, Norwegen, Institut für theoretische Astrophysik, 23. August 1934.

(Mitteilung aus dem Institut für Allgemeine Elektrotechnik der Technischen Hochschule Dresden.)

Erklärung des Normalgradienten Null der Edelgase durch Diffusion.

Von G. Zimmermann in Dresden.

(Eingegangen am 14. September 1934.)

Zwischen konzentrischen Elektroden hatten Güntherschulze und Keller bei den Edelgasen Ar und Ne den Normalgradienten Null gemessen. Es wird eine Rechnung darüber durchgeführt, ob diese Erscheinung sich durch Elektronendiffusion von der Kathode zur Anode infolge eines Elektronenkonzentrationsgefälles erklären läßt. Die Rechnung ergibt, daß bei Verwendung des von Kenty gemessenen Wiedervereinigungskoeffizienten von $2 \cdot 10^{-10}$ für Ar die Konzentration an der Kathode, die nötig ist, um den gemessenen Strom durch Diffusion aufrecht zu erhalten, bis zu 70 Tor noch in möglichen Grenzen liegt. Für He und Ne liegt dieser Grenzdruck, unter der Annahme, daß der Wiedervereinigungskoeffizient der gleiche wie bei Ar ist, noch höher. Zum Schluß wird das Verhalten unedler Gase und die Genauigkeit der Rechnung diskutiert.

I. Übersicht. Güntherschulze und Keller¹⁾ hatten in einem kugligen Gefäß von 40 cm Durchmesser, dessen innere, mit einem Mg-Spiegel bedeckte Wandung als Anode diente und in dessen Mittelpunkt sich eine Mg-Kathode von etwa 4 cm Durchmesser befand, eine Glimmentladung erzeugt. Dabei zeigte sich, daß der Normalgradient bei den Edelgasen Argon und Neon bis zu den höchst angewandten Drucken von 46,3 Tor bei Ar und 28,8 Tor bei Ne Null wurde. Die beiden Forscher erklärten diese Erscheinung mit Hilfe der Versuche von Ramsauer, nach denen der Wirkungsquerschnitt bei Edelgasen mit abnehmender Elektronengeschwindigkeit stark abnimmt, indem sie annahmen, daß die Ramsauerschen Werte bei den von ihm benutzten kleinen Drucken durch unvermeidliche Verunreinigungen noch zu groß gemessen und in Wirklichkeit für Elektronengeschwindigkeiten unter 1 Volt praktisch Null waren. Folgender Gedankengang führt zu einer zweiten Erklärung der beobachteten Erscheinung.

Während in einem normalen Entladungsgefäß ein gut Teil der erzeugten Elektronen zur Gefäßwand abwandert und dort neutralisiert wird, gibt es in dem von Güntherschulze und Keller benutzten Gefäß nur zwei Möglichkeiten zur Beseitigung der Elektronen: entweder durch Wiedervereinigung oder durch Wanderung zur Anode. Im zweiten Fall bilden aber die Elektronen den Glimmstrom. Ist dabei der Normalgradient Null, so

¹⁾ A. Güntherschulze u. F. Keller, ZS. f. Phys. **77**, 703, 1932.

kann dieser Strom nur durch Diffusion der Elektronen vom negativen Glimmlicht zur Anode hervorgerufen werden.

Nach dem Einschalten muß also die Konzentration der Elektronen und Ionen im Glimmlicht so lange zunehmen, bis einerseits durch Wiedervereinigung im Glimmlicht, andererseits durch Abwanderung zur Anode infolge Diffusion ebensoviel Elektronen verschwinden wie erzeugt werden. Um zu prüfen, ob die so entstehende Elektronendiffusion ausreicht, um den eingestellten Glimmstrom zu bilden, oder besser, ob die dazu erforderliche Diffusion zu einer möglichen maximalen Elektronenkonzentration im negativen Glimmlicht führt, wurden die folgenden Rechnungen in Anlehnung an die Versuche von Güntherschulze und Keller durchgeführt.

II. *Die Diffusionsgleichung.* Für den feldfreien Raum geben v. Engel und Steenbeck die Strömungsgleichung

$$u = \frac{v}{3} \cdot \lambda \cdot \frac{dn}{dx} \cdot \frac{1}{n} \quad (1)$$

an, wobei u die mittlere Strömungsgeschwindigkeit der Elektronen in Richtung des Konzentrationsgefälles, v die mittlere ungeordnete Geschwindigkeit der Elektronen, λ ihre mittlere freie Weglänge, dn/dx das Konzentrationsgefälle und n die Konzentration der Elektronen ist. Diese Differentialgleichung gilt für jeden Raumpunkt, der sich in einem feldfreien Gebiet befindet, unabhängig von der Form und Beschaffenheit des Entladungsgefäßes und der Elektroden, denn deren Eigenschaften (Radius, Fläche, Material usw.) kommen nicht in der Formel vor. Sie gilt also auch für das von Güntherschulze und Keller verwendete Gefäß mit seinen konzentrisch angeordneten Elektroden ebenso, wie für ein Gefäß mit planparallelen Elektroden, für die v. Engel und Steenbeck die Formel abgeleitet haben. Da nun bei den Versuchen von Güntherschulze und Keller der Gradient Null war, gilt unsere Gleichung in dem ganzen Gebiet zwischen negativem Glimmlicht und Anode, da wir bei der geringen Stromdichte an der 5000 cm² großen Anode dort eine so geringe Raumladung haben, daß diese keinen merklichen Spannungsabfall mehr hervorzurufen vermag, also auch das Gebiet, das bei einem normalen Entladungsgefäß der Anodenfall einnimmt, praktisch feldfrei ist.

III. *Erforderliche Elektronendichte im negativen Glimmlicht.* Im Entladungsgefäß fließt insgesamt ein Elektronenstrom $i = N_0 \cdot e \cdot u$, wobei N_0 durch die Gleichung $N_0 = 4\pi x^2 n$ definiert¹⁾ und e die Ladung eines

¹⁾ N_0 ist die Anzahl der Elektronen, die sich in einer 1 cm starken Kugelschale im Abstände x befinden. Seine Dimension ist im Gegensatz zu n nicht Elektronen/cm³, sondern Elektronen/cm.

Elektrons ist. Setzen wir den hieraus folgenden Ausdruck $u = i/N_0 \cdot e$ in die Strömungsgleichung ein und lösen diese nach dn/dx auf, so erhalten wir

$$\frac{dn}{dx} = \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{i}{ev\lambda} \cdot \frac{1}{x^2}. \quad (2)$$

Diese Gleichung ist für $v = \text{const}$ integrierbar und ergibt

$$n = \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{i}{ev\lambda} \cdot \frac{1}{x} + C^1. \quad (3)$$

Wenn im Entladungsrohr die ungeordnete Geschwindigkeit der Elektronen konstant ist, so können wir mit dieser Formel n berechnen. Nun ist zwar die Geschwindigkeit nicht konstant. Am negativen Glimmlicht ist sie etwa gleich der Anregungsspannung und wird nach der Anode zu infolge der Energieverluste bei den Zusammenstößen kleiner. Wie wir später zeigen werden, sind aber die Stöße in der Nähe des negativen Glimmlichtes so häufig, daß die Geschwindigkeit schon auf ihr Minimum, die durch die Temperatur bedingte Geschwindigkeit von 39 e-mV, herabgesunken ist, ehe sich die Elektronen merklich aus der Nähe der Kathode entfernt haben. Wir können demnach zunächst diese 39 e-mV als die konstante ungeordnete Geschwindigkeit annehmen und erhalten für die Gleichung (3), nachdem wir die Konstante aus der Grenzbedingung $x = 20$, $n = 0$ (d. h. an der Anode ist die Elektronenkonzentration Null) berechnet, $e = 1,592 \cdot 10^{-19}$ Coulomb und $v = 1,17 \cdot 10^7$ cm/sec ($= 39$ e-mV) eingesetzt haben, die Form

$$n = 12,81 \cdot 10^{10} \frac{i}{\lambda} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{20} \right).$$

Demnach ist die zur Aufrechterhaltung der Strömung erforderliche Elektronendichte am negativen Glimmlicht ($x = 2$)

$$n_{\text{Gl}} = 5,78 \cdot 10^{10} \cdot \frac{i}{\lambda}. \quad (4)$$

Die Strömungsgeschwindigkeit erhalten wir, wenn wir in die Formel (1)

$$\frac{dn}{dx} = \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{i}{ev\lambda} \cdot \frac{1}{x^2} \quad [\text{Formel (2)}] \quad \text{und} \quad n = 19,2 \cdot \frac{i}{\lambda} \quad [\text{Formel (4)}]$$

einsetzen. Sie wird dann:

$$u = 2,18 \cdot 10^6 \cdot \lambda \text{ cm/sec.} \quad (5)$$

¹⁾ Der Ausdruck für n wird nicht negativ, da wir dn/dx nicht als Zunahme, sondern als Abnahme der Elektronenkonzentration eingeführt haben.

Damit wären n und u am negativen Glimmlicht berechnet. Wir müssen nun noch nachweisen, daß tatsächlich die Stoßzahl dort so groß ist, wie wir oben angenommen haben. Die Stoßzahl pro freie Weglänge in radialer Richtung z ist aus der Formel $z = v/u$ zu errechnen. Betrachten wir als Beispiel Argon, bei dem der Fall am ungünstigsten liegt, da es die kleinsten Stoßverluste hat, und nehmen, um ein Beispiel herauszugreifen, an, daß die freie Weglänge $0,5 \cdot 10^{-2}$ cm ist, was einem Druck von 9 Tor entspricht, so wird $u = 1,09 \cdot 10^4$ cm/sec. v ist gleich 11,5 e-Volt $= 2,02 \cdot 10^8$ cm/sec. Aus beiden folgt $z = 18500$. Da die Verluste pro Stoß $0,27 \cdot 10^{-2}\%$ der vorhandenen Energie betragen, ist diese, wenn das Elektron den Weg λ in radialer Richtung zurückgelegt hat, auf den $0,999973^{18500} = 0,61$ Teil gesunken. Um den gleichen Betrag ist auch die Geschwindigkeit gesunken, wenn wir sie in e-Volt messen. Wir hätten demnach etwa nach 0,06 cm die Minimalgeschwindigkeit praktisch erreicht. Eine genauere graphische Rechnung ergibt unter Berücksichtigung der tatsächlichen Geschwindigkeiten, daß der wahre Wert bei 0,3 cm liegt, wenn wir den oben angenommenen Druck von 9 Tor haben. Diese Strecke ist so klein, daß wir obige Rechnung vollständig rechtfertigen können. Den Fehler, den wir in bezug auf n dabei machen, können wir bei der geringen Genauigkeit der für die Rechnung zur Verfügung stehenden Zahlenwerte (Genauigkeit des Wiedervereinigungskoeffizienten) vernachlässigen. Er beträgt in unserem Beispiel etwa 7%.

IV. *Möglichkeit einer Diffusionsströmung.* Die Wiedervereinigung von Elektronen und Ionen im Gas ist mit Leuchten verbunden. Das Leuchten des Glimmlichtes ist aber durchaus nicht reines Wiedervereinigungsleuchten, sondern zum großen Teil Anregungsleuchten. Mit um so größerem Recht können wir annehmen, daß in dem Abstände von der Kathode, in dem das Glimmlicht unmerklich geworden ist, erst recht die Wiedervereinigung unwesentlich geworden ist.

Wir werden deshalb als Kriterium für die Möglichkeit einer reinen Diffusionsströmung die Anzahl der Elektronen, die in der Zeiteinheit aus dem negativen Glimmlicht abwandern, mit den in der Zeiteinheit dort durch Wiedervereinigung verschwindenden Elektronen vergleichen. Die Dicke des negativen Glimmlichtes ist in erster Annäherung gleich der Dicke des Fallraumes also gleich d_0/p , wenn d_0 die Dicke bei 1 Tor und p der Druck ist. Das Volumen des negativen Glimmlichtes ist dann $V = 16 \pi d_0/p$ ¹⁾

¹⁾ Das negative Glimmlicht befindet sich bei den zu untersuchenden Drucken so dicht an der Kathode, daß wir für seinen Abstand vom Kugelmittelpunkt $x = 2$ einsetzen können. Die Oberfläche des Glimmlichtes $4 \pi x^2$ wird dann 16π .

und enthält annähernd $16 \pi n d_0/p$ Elektronen. Mit Hilfe der Strömungsgeschwindigkeit u können wir die Zahl N der pro Sekunde aus dem negativen Glimmlicht abwandernden Elektronen berechnen. Es wird:

$$N = 16 \pi \frac{d_0}{p} n \cdot u \cdot \frac{p}{d_0} = 16 \pi \cdot n \cdot u \text{ Elektronen/sec.} \quad (6)$$

Durch Wiedervereinigung im negativen Glimmlicht verschwinden nach der Formel $N' = \alpha \cdot n^2$:

$$N' = 16 \pi \frac{d_0}{p} \alpha \cdot n^2 \text{ Elektronen/sec.} \quad (7)$$

Wir können also die beiden Vergleichszahlen ermitteln und müssen feststellen, ob die durch Wiedervereinigung verschwindenden Elektronen die Zahl der zur Verfügung stehenden so weit verringert, daß nicht mehr die erforderliche Anzahl für die Strömung vorhanden ist, oder nicht. Ist die Zahl der durch Wiedervereinigung verschwindenden klein, so werden einfach im Fallraum etwas mehr Elektronen erzeugt werden, so daß Wiedervereinigung und Strömung gedeckt werden können. Wie weit dies möglich ist, läßt sich berechnen. Pro Sekunde muß das negative Glimmlicht N Elektronen zur Deckung der Diffusionsströmung liefern, $N' = qN = \alpha N^2$ ¹⁾ verschwinden aber durch Wiedervereinigung. Im Gleichgewicht müssen also nicht N , sondern mehr, sagen wir yN Elektronen erzeugt werden. Dann werden aber auch $\alpha (yN)^2$ Elektronen durch Wiedervereinigung verschwinden. Wir erhalten auf diese Weise für den Gleichgewichtszustand die Gleichung $yN = \alpha (yN)^2 + N$, die in der Form $y = qy^2 + 1$ die Lösung

$$y = \frac{1}{2q} \pm \sqrt{\frac{1}{4q^2} - \frac{1}{q}}$$

ergibt. Diese Lösung ist aber nur für $q < 1/4$ reell, d. h. solange unser errechnetes N' kleiner als 25% von N ist. Demnach kann die Diffusionsströmung sich auch nur bis dahin im erforderlichen Maße ausbilden und der Normalgradient Null werden.

Für die Rechnung folgt daraus, daß im Grenzfall $4 \cdot N' = N$ ist. Setzen wir N und N' aus den Gleichungen (6) und (7) ein, so erhalten wir $4 \alpha \cdot n d_0/p = u$. Nehmen wir weiter die Ausdrücke der Gleichungen (4) und (5) zu Hilfe und berücksichtigen dabei, daß $\lambda = \lambda_0/p$ und $i = i_0 \cdot p^2$ ist, wobei λ_0 und i_0 die Werte bei 1 Tor darstellen, so erhalten wir die

¹⁾ q gibt den Bruchteil an, den N' in bezug auf N darstellt.

Gleichung für den Grenzdruck, bis zu den hinauf die Diffusionsströmung ausreicht, um den gemessenen Strom aufrecht zu erhalten. Es ergibt sich:

$$p_{\max} = 2,18 \cdot 10^{-2} \cdot \sqrt[3]{\frac{\lambda_0^2}{i_0 \cdot d_0 \cdot \alpha}}. \quad (8)$$

Diese Grenzbedingung erhalten wir, wenn wir nur die Elektronen im Entladungsgefäß berücksichtigen. Was wird aber aus den Ionen, die im negativen Glimmlicht in gleicher Anzahl wie die Elektronen vorhanden sind? Ein großer Teil wandert, wie bei jeder Glimmentladung, zur Kathode und löst von dieser neue Elektronen ab.

Dieser Teil interessiert uns hier nicht. Für den Rest bestehen aber nur die gleichen Möglichkeiten wie für die Elektronen: Wiedervereinigung oder Wanderung zur Anode durch Diffusion. Da kein Feld, also auch keine Raumladung vorhanden ist, ist die Konzentration der Elektronen und Ionen überall gleich. Die Ionen liefern ebenso einen Diffusionsstrom, der aber wegen der viel kleineren Geschwindigkeit der Ionen auch viel kleiner ist als der Elektronendifusionsstrom. Wir können ihn gegen diesen vernachlässigen und den gemessenen Strom gleich dem Elektronenstrom setzen, wie wir es oben schon getan haben. Die Berücksichtigung der Ionen bringt also keine Änderung der durch Gleichung (8) dargestellten Grenzbedingung.

Argon ist das einzige der von Güntherschulze und Keller untersuchten Gase, von dem wir alle in der Grenzbedingung vorkommenden Größen kennen. Wir verwenden zunächst für die mittlere freie Weglänge den aus der kinetischen Gastheorie ergebenden Wert für langsame Elektronen $\lambda_0 = 0,032$ cm und setzen für $d_0 = 0,34$ cm ein. i_0 haben Güntherschulze und Keller zu 0,4 mA bei voller Bedeckung der Kathode gemessen. α gibt uns Kenty¹⁾ zu $2 \cdot 10^{-10}$ an. Setzen wir diese Werte ein, so erhalten wir $p_{\max} = 70$ Tor. D. h. also, daß bei den von Güntherschulze und Keller untersuchten Drucken die Diffusionsströmung bestimmt in der Lage ist, den gemessenen Strom aufrecht zu erhalten.

Noch günstiger werden die Verhältnisse, wenn wir die von Ramsauer gefundene Abhängigkeit der freien Weglänge von der Geschwindigkeit der Elektronen berücksichtigen. Ramsauer hat bei Edelgasen für die Geschwindigkeiten unter 1 e-Volt ein Anwachsen der freien Weglänge auf ein Vielfaches des gaskinetischen Wertes gefunden. Da wir eine Geschwindigkeit der Elektronen von 39 e-mV haben, können wir für die freie Weglänge einen

¹⁾ C. Kenty, The recombination of argon ions and electrons. *Physical Review* **32**, 625, 1928.

viel größeren Wert einsetzen, als wir getan haben, und würden damit einen noch höheren als den errechneten Grenzdruck erhalten.

(8) Dies wären die Verhältnisse bei Argon. Für die anderen beiden von Güntherschulze und Keller untersuchten Edelgase Neon und Helium kennen wir den Wiedervereinigungskoeffizienten nicht. Wir können aber annehmen, daß er ungefähr mit dem von Argon übereinstimmt, da in bezug auf die Wiedervereinigung die Edelgase gleiches Verhalten zeigen. Setzen wir für α den Wert $2 \cdot 10^{-10}$ ein, so werden wir zum mindesten ein Resultat erhalten, daß uns die Gegend angibt, in der wir die Grenze für eine reine Diffusionsströmung zu suchen haben. Unter dieser Annahme erhalten wir für Neon $p_{\max} = 125$ Tor und für Helium $p_{\max} = 165$ Tor¹⁾. Wir sehen, daß diese Drucke noch höher liegen als für Argon. Für Neon haben auch Güntherschulze und Keller bei allen untersuchten Drucken (bis 28 Tor) keinen Gradienten gefunden. Für Helium, bei dem sie etwa von 8 Tor an einen merklichen Gradienten gefunden haben, geben sie selbst an, daß ihr Meßergebnis vermutlich durch Verunreinigungen des Gases gefälscht worden ist, so daß wir mit ihnen annehmen können, daß in ganz reinem Helium im untersuchten Gebiet der Gradient Null geworden wäre.

Über das Verhalten unedler Gase läßt sich folgendes sagen. Bei diesen, wie z. B. bei dem von Güntherschulze und Keller untersuchten Wasserstoff, werden die Verhältnisse durch die Bildung negativer Ionen sehr kompliziert. Der durch das Auftreten von negativen Ionen bedingte Ionenmanteleffekt²⁾ wird vermutlich bewirken, daß die Entladung nicht das ganze Kugelvolumen in Anspruch nimmt, sondern sich auf bestimmte Gebiete zusammenzieht. Dadurch wird aber die ganze Konzentrationsverteilung anders. Diese Erscheinungen würden bei einer Diffusionsströmung besonders stark sein, da die Bildung von negativen Ionen erstens durch die geringe Geschwindigkeit der Elektronen und zweitens durch deren höhere Konzentration als bei normaler Entladung begünstigt wird.

Aber die Bildung von negativen Ionen allein verhindert schon eine kräftige Diffusionsströmung, denn dadurch werden der Entladung, wahrscheinlich in viel stärkerem Maße, Elektronen entzogen als durch Wiedervereinigung, da dies auf der ganzen Weglänge von Kathode zu Anode geschieht. Dies wäre zwar nicht so schlimm, wenn die negativen Ionen weiter den Anteil des Stromes geben würden, den die Elektronen gebildet hätten.

¹⁾ Es wurde in Formel (8) eingesetzt, für Neon: $\lambda_0 = 0,056$ cm, $i_0 = 0,1$ mA, $d_0 = 0,70$ cm; für Helium: $\lambda_0 = 0,089$ cm, $i_0 = 0,05$ mA, $d_0 = 1,50$ cm. λ_0 nach Seeliger, Physik der Gasentladungen II. Aufl. 1934, S. 26. Langsame Elektronen! — ²⁾ Siehe A. Güntherschulze, ZS. f. Phys. (im Druck).

Da aber die Ionen, entsprechend ihrer Masse, viel langsamer strömen als die Elektronen und sich außerdem viel häufiger mit positiven Ionen vereinigen, als dies die Elektronen tun, ist dies aber nicht der Fall. Es wird daher bei unedlen Gasen höchstens bei sehr geringem Druck die Möglichkeit einer Diffusionsströmung von der Größe der Gesamtströmung vorhanden sein.

Zum Schluß wollen wir uns noch über die Genauigkeit unserer Ergebnisse klar werden. Sie ist allerdings nicht sehr groß, da vor allem der Wiedervereinigungskoeffizient nicht sehr genau bekannt ist. Kenty selbst gibt eine Fehlermöglichkeit um den Faktor 5 an. Da dies aber in der dritten Wurzel eingeht, wird bei uns dieser Faktor etwa mit 1,7 für den Druck anzugeben sein. Wenn wir auch eine große Fehlermöglichkeit im Endresultat haben, können wir trotzdem sagen, daß bei den Versuchen von Güntherschulze und Keller die Diffusion schon ohne Ramsauer-Effekt genügt, den Normalgradienten Null hervorzurufen, denn die errechneten Drucke liegen weit genug über den höchsten bei den Versuchen angewandten Drucken.

Angeregt und unterstützt worden ist diese Arbeit von Herrn Prof. Güntherschulze, dem ich auch an dieser Stelle dafür danken möchte.

Über die Temperaturabhängigkeit des Photoeffektes reiner und mit Fremdatomen besetzter Metalloberflächen bei tiefen Temperaturen¹⁾.

Von R. Suhrmann und A. Schallamach in Breslau.

Mit 8 Abbildungen. (Eingegangen am 17. August 1934.)

Mit Hilfe einer vollständig (einschließlich des Fensters) in das Temperaturbad eintauchenden Photozelle wird die Temperaturabhängigkeit des lichtelektrischen Effektes bei Zimmertemperatur, der Temperatur der flüssigen Luft und des flüssigen Wasserstoffs untersucht, und zwar an Spiegeln aus Beryllium, Wismut und Silber (das letztere bedeckt mit atomar verteiltem Kalium), die durch Verdampfen im Hochvakuum hergestellt wurden. Die Meßwerte sind bei wiederholter Einkühlung und Erwärmung sehr gut zu reproduzieren. Die Ergebnisse sind die folgenden: Der Theorie entsprechend wird die bei reinen Beryllium-

oberflächen aus der lichtelektrischen Gesamtemission $J = M \cdot Tr \cdot e^{-\frac{e_0}{kT} \cdot \psi}$ erhaltene lichtelektrische Gerade durch Abkühlung parallel zu kleinen Werten verschoben. Das Austrittspotential ψ bleibt also unverändert; die Mengenkongstante M nimmt ab, und zwar um so schwächer, je niedriger die Temperatur, in Übereinstimmung mit der neuen Elektronentheorie. Durch das Verhalten der Empfindlichkeitskurven von Beryllium- und Wismutoberflächen wird die Fowlersche Theorie, und damit die neue Elektronentheorie, auch bei tiefen Temperaturen bestätigt. Die aus der Fowlerschen Formel berechnete Empfindlichkeitsabnahme bei Abkühlung stimmt in unmittelbarer Nähe der langwelligen Grenze λ' mit der beobachteten überein, mit zunehmender Entfernung von λ' treten immer größer werdende Abweichungen auf, die vermutlich auf die fester ans Metallgitter gebundenen Elektronen zurückzuführen sind. Der Einfluß der letzteren macht sich auch in dem Verhalten der mit atomar verteiltem Kalium bedeckten Silberoberfläche bemerkbar.

1. Problemstellung.

Während früher viele Autoren der Ansicht waren, daß die lichtelektrische Empfindlichkeitskurve bei genügender spektraler Reinheit scharf in die Wellenlängenabszisse einschneidet, vertrat Suhrmann²⁾ die Meinung, daß die auch bei sorgfältigen Beobachtungen festgestellte *allmähliche* Annäherung der Empfindlichkeitskurve an die Wellenlängenabszisse auf die Temperaturbeeinflussung des Photoeffektes zurückzuführen wäre. Er stützte seine Auffassung darauf, daß die von ihm an verschiedenen Metalloberflächen nach der Methode der Gesamtemission aus der Neigung der lichtelektrischen Geraden berechnete Grenzwellenlänge λ' stets etwas kleiner war als die direkt beobachtete. Wird mit J der bei der Bestrahlung mit dem schwarzen

¹⁾ Eine kurze Zusammenfassung einiger Ergebnisse dieser Arbeit findet sich in Phys. ZS. **34**, 877, 1933. — ²⁾ R. Suhrmann, ZS. f. Phys. **33**, 63, 1925. —

Körper der Temperatur T erhaltene Photostrom bezeichnet, so gilt nämlich die der Glühelctronen-Emissionsgleichung analoge Beziehung¹⁾

$$J = M \cdot T^r \cdot e^{-\frac{e_0}{kT} \cdot \psi}, \quad (1)$$

in der M , bezogen auf 1 cm^2 Oberfläche, eine von der universellen Konstanten A_0 ($= 60,2$ bzw. nach der neueren Theorie $120,4 \text{ Amp./cm}^2 \text{ Grad}^2$) der Glühelctronenemission verschiedene Konstante, r eine Zahl in der Größenordnung von 2 und ψ das Austrittspotential beim absoluten Nullpunkt bedeutet, so daß

$$\lambda' = \frac{h \cdot w_L}{e_0 \cdot \psi} \quad (2)$$

$[w_L$ Lichtgeschwindigkeit] die Grenzwellenlänge bei der Kathodentemperatur $\vartheta = 0$ ist. Bei Zimmertemperatur sollten aber nicht nur die Elektronen die Metalloberfläche verlassen können, die mindestens das Energiequant $h \cdot \nu'$ aufgenommen haben, sondern auch Elektronen, die ein etwas kleineres Energiequant absorbiert haben, dafür aber eine so große thermische Zusatzenergie besitzen, daß ihre Gesamtenergie gleich oder größer als $e_0 \cdot \psi$ ist²⁾, d. h. bei Zimmertemperatur sollte die beobachtete unscharfe Grenze gegenüber der aus (1) berechneten nach langen Wellen verschoben sein, wie die Versuche auch ergeben hatten.

Da ψ in Gleichung (1) das von der Temperatur *unabhängige* Austrittspotential darstellt, ist zu erwarten, daß die an derselben Metalloberfläche bei verschiedenen Temperaturen erhaltenen lichtelektrischen Geraden dieselbe Neigung besitzen, also dasselbe Austrittspotential ψ ergeben und sich nur durch die Mengenkongstante M unterscheiden. M ist ein Maß für die Zahl der emittierenden Zentren, welche bei höheren Temperaturen durch die infolge der zusätzlichen Wärmeenergie hinzukommenden Elektronen vergrößert wird. M sollte bei gleichem Temperaturverhältnis um so weniger abnehmen, je tiefer die Kathodentemperaturen liegen, denn nach der Sommerfeldschen Elektronentheorie vermindert sich die mittlere Energie der Elektronen quadratisch mit ϑ . Dies zu untersuchen war eine Aufgabe der vorliegenden Arbeit.

Auf Grund der gleichen Annahme wie Suhrmann und unter Verwendung des Sommerfeld-Fermi-Diracschen Elektronengases hat nun Fowler in den letzten Jahren eine Theorie der Temperaturabhängigkeit des äußeren Photoeffektes entwickelt, nach welcher sich der Photostrom i für

¹⁾ C. W. Richardson, Phil. Mag. **23**, 594, 1912; **27**, 476, 1914. —

²⁾ R. Suhrmann, l. c. S. 82; ferner ZS. f. Phys. **54**, 99, 1929, insbesondere S. 107.

dieselbe Anzahl absorbiert Lichtquanten bei der Kathodentemperatur ϑ und der Lichtfrequenz ν durch die Beziehungen

$$\log \frac{i}{\vartheta^2} = \log \left\{ e^\delta - \frac{e^{2\delta}}{2^2} + \frac{e^{3\delta}}{3^2} \mp \dots \right\} + \text{const.} \quad (3)$$

$$\log \frac{i}{\vartheta^2} = \log \left\{ \frac{\pi^2}{6} + \frac{\delta^2}{2} - \left(e^{-\delta} - \frac{e^{-2\delta}}{2^2} \pm \dots \right) \right\} + \text{const} \quad (4a)$$

darstellen läßt, in denen

$$\delta = - \frac{e_0 \cdot \varphi - h \cdot \nu}{k \cdot \vartheta} = \frac{h(\nu - \nu')}{k \cdot \vartheta}. \quad (5)$$

Gleichung (3) gilt für $\delta \leq 0$, d. h. für die langwellige Seite von λ' bis zu λ' , Gleichung (4a) für $\delta \geq 0$, d. h. für die kurzwellige Seite von λ' , aber nur in der Nähe der langwelligen Grenze.

Die Gleichungen (3) und (4a) sind verschiedentlich nachgeprüft worden, aber nur bei Temperaturen oberhalb der Zimmertemperatur, und zwar in der Weise, daß zuerst $\log i/\vartheta^2$ für beliebige positive und negative Werte von δ als Funktion von δ und dann in dasselbe Koordinatensystem die gemessenen Werte $\log i/\vartheta^2$ als Funktion von $h \cdot \nu/k \cdot \vartheta$ eingetragen wurden. Die horizontale Verschiebung der beiden Kurven gegeneinander ergab $e_0 \cdot \varphi/k \cdot \vartheta$. Die hieraus berechneten φ - bzw. λ' -Werte mußten bei verschiedenen Kathodentemperaturen ϑ übereinstimmen.

Man kann jedoch Gleichung (4a) auch direkt prüfen, indem man ihr die Gestalt (4b) gibt:

$$i = \text{const} \cdot \vartheta^2 \cdot \left\{ \frac{\pi^2}{6} + \frac{\delta^2}{2} - \left(e^{-\delta} - \frac{e^{-2\delta}}{2^2} \pm \dots \right) \right\}, \quad (4b)$$

und das mittels Gleichung (4b) berechnete Verhältnis i_1/i_2 der Empfindlichkeit für eine bestimmte Wellenlänge bei den Temperaturen ϑ_1 und ϑ_2 mit dem gemessenen Verhältnis vergleicht. Da die mittlere Energie der Elektronen proportional ϑ^2 abnimmt, sollte sich i_1/i_2 bei gleichem Temperaturverhältnis um so mehr der 1 nähern, je tiefer die Beobachtungstemperaturen liegen. Es war daher von besonderem Interesse, die direkte Gültigkeit der Gleichung (4b) bei tiefen Temperaturen zu prüfen.

Während sich die Gleichungen (3) und (4) bei höheren Temperaturen in unmittelbarer Nähe der langwelligen Grenze bewährt haben, sind in größerer Entfernung von λ' Abweichungen beobachtet worden, die sich darin äußerten, daß die bei zwei verschiedenen Kathodentemperaturen erhaltenen Empfindlichkeitskurven einen gemeinsamen *Schnittpunkt* aufwiesen¹⁾. Diese Eigentümlichkeit ist vielleicht darauf zurückzuführen, daß

¹⁾ R. P. Winch, Phys. Rev. **37**, 1269, 1931; L. W. Morris, ebenda, S. 1263; R. Suhrmann u. H. Theissing, ZS. f. Phys. **73**, 709, 1932.

die in größerem Abstand von λ' ausgelösten Elektronen nicht mehr allein durch die Potentialschwelle an der Metalloberfläche, sondern durch zusätzliche Gitterkräfte gebunden sind. Da sich nun solche Gitterkräfte in der Nähe optischer Anomalien der Metalle am stärksten bemerkbar machen sollten, war z. B. bei einer Silberoberfläche in der Nähe des Reflexionsminimums bei $317\text{ m}\mu$ eine besondere Art der Temperaturabhängigkeit zu erwarten. Sie konnte jedoch an einer reinen Silberoberfläche nicht studiert

werden, weil λ' für reines Silber bei viel kürzeren Wellen liegt. Die Austrittsarbeit der Silberoberfläche mußte vielmehr durch adsorbierte Kaliumatome herabgesetzt werden. Bei einer die optimale Bedeckung eben überschreitenden Kaliumbesetzung entsteht hierbei ein spektrales Maximum bei $343\text{ m}\mu^1$), dessen Verlauf sehr wahrscheinlich zum Teil durch das Reflexionsminimum des Silbers bei $317\text{ m}\mu$ bedingt ist²⁾. Aus diesen Gründen wurde auch die Temperaturabhängigkeit des Photoeffektes einer solchen Oberfläche bei tiefen Temperaturen untersucht.

2. Versuchsanordnung.

Die Untersuchung des Photoeffektes bei tiefen Temperaturen bietet insofern große experimentelle Schwierigkeiten, als sich Restgase und leichter verdampfbare Substanzen, wie z. B. Alkalimetalle, auf der Kathodenoberfläche kondensieren und einen Temperatureffekt vortäuschen können. Ives und Johnsrud³⁾ suchten dies dadurch zu vermeiden, daß sie das zu untersuchende Alkalimetall nicht nur als Kathode, sondern auch als Anode verwendeten und die Kathode klein wählten im Verhältnis zur Anode. Da beide Elektroden, die Anode zuerst, gekühlt wurden, mußten sich Restgase und Dämpfe hauptsächlich auf der Anode niederschlagen.

In der vorliegenden Arbeit wurde die Kondensation solcher Substanzen auf der Kathode dadurch vermieden, daß die Photozelle, die keinerlei Schliffe und Kittstellen besaß, vollständig in das Temperaturbad ein-

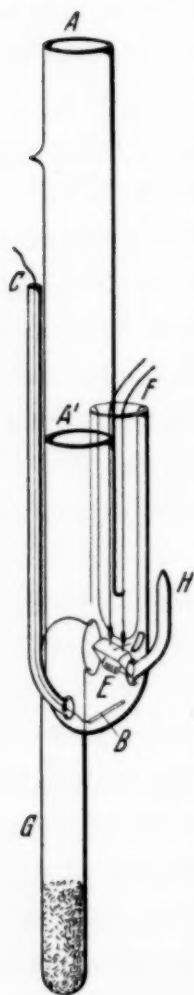


Fig. 1.

Photozelle zur Untersuchung des lichtelektrischen Effektes bei tiefen Temperaturen.

¹⁾ R. Suhrmann u. A. Schallamach, ZS. f. Phys. **79**, 153, 1932. —
²⁾ H. E. Ives u. H. B. Briggs, Phys. Rev. **38**, 1477, 1931; **40**, 802, 1932. —
³⁾ H. E. Ives u. A. L. Johnsrud, Journ. Opt. Soc. **11**, 565, 1925.

tauchte, so daß auch das Quarzfenster A' (Fig. 1) und die Elektrodenzuführungen C und F und damit alle Elektrodenteile gleichzeitig auf die Badtemperatur abgekühlt wurden. Um Kondensation von Luft an A' beim Abkühlen auf die Temperatur des flüssigen Wasserstoffs zu vermeiden, war der Raum zwischen den Quarzfenstern A und A' evakuiert. Dieser aus Quarzglas bestehende Teil war durch ein Übergangsstück mit der aus Wolframglas¹⁾ angefertigten Zelle verbunden.

Das zu untersuchende Metall befand sich zuerst in der Wolframspirale E , aus der es auf die Zellenwandung gedampft wurde. Der dort gebildete spiegelnde Beschlag stand durch die an die Glaswandung angeschmolzene Platinfole B mit der Kathodenzuführung C in Verbindung. E diente gleichzeitig als Anode und war auf der einen Seite von einer Kappe D aus vakuumgeschmolzenem Nickelblech umgeben, die das Beschlagen des Anodenfußes während des Verdampfungsvorganges verhinderte.

Die Vorbereitung der Zelle geschah in folgender Weise. Vor dem Ansetzen des Anodenrohres heizten wir den Wolframdraht²⁾ E in einem gesonderten Gefäß im Hochvakuum aus und versahen ihn dann mit dem zu untersuchenden Metall. Hierauf wurde das Anodenrohr an die gründlich gereinigte Zelle und diese an die Vakuumapparatur angeschmolzen. Nun heizten wir zuerst die Adsorptionskohle in G aus, dann bei warmer Kohle die Zelle und verdampften danach das Metall, das einen scharf begrenzten Spiegel bildete. Jetzt wurde die Zelle bei H abgeschmolzen und so weit, wie sie in das Temperaturbad eintauchen sollte, in eine geerdete Aluminiumfolie gewickelt, um elektrostatische Störungen durch die Badflüssigkeit (flüssige Luft bzw. flüssiger Wasserstoff) zu vermeiden. Das Ansatzrohr G wurde unmittelbar darauf in flüssige Luft getaucht und während der gesamten Versuchsdauer hiermit bzw. mit flüssigem Wasserstoff gekühlt.

Die Meßapparatur war die gleiche wie in einer früheren Veröffentlichung³⁾. Das Licht einer Quarzquecksilberlampe oder einer Wolframlampe mit Quarzfenster fiel in einen Quarzmonochromator mit doppelter Zerlegung und gelangte dann durch eine Quarzlinse entweder über ein rechtwinkliges Quarzprisma in eine mit Thermosäule und Panzergalvanometer ausgeeichte

¹⁾ Auch bei dieser Untersuchung bewährte sich das uns von der Firma Osram, Zweigniederlassung Weißwasser O.-L. freundlichst zur Verfügung gestellte Wolframglas durch sein hohes Isolationsvermögen und seine Temperaturbeständigkeit aufs beste; selbst dicke Wolframeinschmelzungen vertrugen das Abkühlen auf die Temperatur des flüssigen Wasserstoffs. — ²⁾ Für die freundliche Überlassung des thoriumfreien Wolframdrahtes möchten wir der Osram G. m. b. H., Berlin, unseren verbindlichsten Dank sagen. — ³⁾ R. Suhrmann u. A. Schallamach, l. c.

Vergleichsphotozelle, oder, nachdem das Prisma nach unten umgelenkt war, in die Meßzelle. Diese war unterhalb von A fest eingespannt. Bei Tieftemperaturmessungen wurde von unten ein Dewar-Gefäß mit der Badflüssigkeit übergeschoben. Ein Deckel verhinderte das Abkühlen des Zuführungsrohres C , des Fensters A und des Umlenkprismas durch vorbeistreichende kalte Gase.

Die Kathodenzuführung C stand mit einem Fadenelektrometer in Verbindung. Die Photoströme wurden entweder nach der Zeitmeßmethode oder nach der Kondensator-Nullmethode ermittelt¹⁾.

Zur Aufnahme der lichtelektrischen Geraden verwendeten wir eine Wolfram-Bandlampe²⁾ mit Quarzfenster, die in den Strahlengang hinter dem Monochromator eingeschoben werden konnte. Das Licht der Bandenden wurde ausgeblendet, so daß nur das Licht des mittleren Bandteiles von gleichmäßiger Temperatur in die Zelle fiel. Die Temperaturmessung des Lampenbandes erfolgte mit einem Mikropyrometer nach Zwischenschaltung eines der Meßoptik ähnlichen optischen Satzes.

Die Reproduzierbarkeit der Resultate prüften wir in der Weise, daß wir die Gesamtemission bzw. die Empfindlichkeitskurve abwechselnd, z. B. bei 83° abs., dann bei 293° abs., dann wieder bei 83° abs., dann bei 20° und schließlich bei 83° abs., aufnahmen. Wie weiter unten bei der lichtelektrischen Gesamtemission der Berylliumoberfläche und bei der Empfindlichkeitskurve der mit Kaliumatomen besetzten Silberoberfläche gezeigt wird, lagen die Abweichungen der Meßreihen gleicher Temperatur innerhalb der Meßfehlergrenze.

3. Messungsergebnisse und ihre Deutung.

a) *Lichtelektrische Geraden einer Berylliumkathode bei 293, 83 und 20° abs.* Zur Prüfung der Frage, ob das Austrittspotential ψ bei der Ermittlung aus der Gesamtemission nach Gl. (1) temperaturunabhängig erhalten wird, verwendeten wir einen durch Verdampfen in der oben geschilderten Weise hergestellten Berylliumspiegel; denn es war zu erwarten, daß Beryllium eine verhältnismäßig kleine Austrittsarbeit besitzt, so daß es bei Bestrahlung mit der Wolframlampe noch gut meßbare Photoströme aussendet. In Tabelle 1 sind die Gesamtemissionswerte bei der schwarzen

¹⁾ Vgl. Simon-Suhrmann, Lichtelektrische Zellen und ihre Anwendung, S. 120, 135. Berlin 1932. — ²⁾ Wie A. Becker (Ann. d. Phys. **78**, 83, 1925) zeigte, ist es nicht nötig, als Lichtquelle einen schwarzen Körper zu verwenden, da sich der Einfluß der optischen Eigenschaften des Strahlers und der Kathode weitgehend heraushebt.

Lampentemperatur T und der Kathodentemperatur ϑ eingetragen, und zwar die Kolonnen in der Reihenfolge der Messung.

Tabelle 1.
Lichtelektrische Gesamtemission J eines Berylliumspiegels als Funktion der Temperatur T des Lichtstrahlers bei verschiedenen Kathodentemperaturen ϑ .

T° abs.	Lichtelektrische Gesamtemission in 10^{-10} Amp.					
	$\vartheta = 83^{\circ}$ abs.	$\vartheta = 293^{\circ}$ abs.	$\vartheta = 83^{\circ}$ abs.	$\vartheta = 20^{\circ}$ abs.	$\vartheta = 83^{\circ}$ abs.	$\vartheta = 83^{\circ}$ abs. Mittelwerte
2084	0,0312	0,0365	0,0321	0,0304	0,0320	0,0318
2140	0,0522	0,0637	0,0532	0,0513	0,0531	0,0528
2193	0,0845	0,1022	0,0846	0,0829	0,0855	0,0849
2245	0,1358	0,1628	0,1362	0,1292	0,1342	0,1354
2296	0,2072	0,2523	0,2105	0,2005	0,2105	0,2094
2360	0,3480	0,408	0,3445	0,3307	0,3434	0,3453
2425	0,565	0,661	0,559	0,538	0,559	0,561
2488	0,872	1,039	0,880	0,852	0,868	0,873
2548	1,322	1,608	1,345	1,290	1,310	1,336
2610	1,997	2,400	2,010	1,948	1,995	2,001

Tabelle 2.
Austrittspotential ψ , wahre langwellige Grenze λ' und relative Mengenkonstante M bei verschiedenen Kathodentemperaturen ϑ .

ϑ in $^{\circ}$ abs.	ψ in Volt	λ' in $m\mu$	M in Amp./Grad ²
293	3,323	371,2	$8,89 \cdot 10^{-11}$
83	3,309	372,8	$6,93 \cdot 10^{-11}$
20	3,305	373,3	$6,57 \cdot 10^{-11}$

Tabelle 3.
Lichtelektrische Empfindlichkeit i von Berylliumoberflächen bei verschiedenen Kathodentemperaturen ϑ .

Wellenlänge λ in $m\mu$	Lichtelektrische Empfindlichkeit in 10^{-5} Coul/cal		i_{83}/i_{293}	Lichtelektrische Empfindlichkeit in 10^{-5} Coul/cal		i_{20}/i_{293}
	$\vartheta = 293^{\circ}$ abs.	$\vartheta = 83^{\circ}$ abs.		$\vartheta = 293^{\circ}$ abs.	$\vartheta = 20^{\circ}$ abs.	
365,5	0,434	0,367	0,85	0,588	0,495	0,84
334,1	1,295	0,925	0,71	1,70	1,49	0,88
313,2	2,245	1,915	0,85	4,08	3,46	0,85
302,2	3,71	3,18	0,86	6,75	5,97	0,88
296,7	4,75	4,27	0,90	—	—	—
280,3	11,65	10,60	0,91	18,3	16,92	0,92
265,5	22,80	21,30	0,93	32,6	30,6	0,94
254,0	34,10	32,70	0,96	47,0	44,3	0,94
248,2	40,85	39,40	0,96	55,2	53,1	0,96
239,9	49,5	47,70	0,96	66,2	65,5	0,99
234,5	55,5	54,1	0,97	73,7	70,4	0,96
226,7	65,2	65,3	1,00	87,2	83,0	0,95

Wie man durch den Vergleich der Mittelwerte in der letzten Kolonne mit den Werten in den Kolonnen für $\vartheta = 83^\circ$ abs. erkennt, betragen die Abweichungen der bei derselben Temperatur erhaltenen Meßwerte von den Mittelwerten zumeist nur einige Promille; die Reproduzierbarkeit der Photoströme bei verschiedenen Temperaturen ist also sehr gut.

Durch Logarithmieren von Gleichung (1) erhält man die Beziehung

$$\log J - 2 \log T = \log M - \frac{e_0 \cdot \log e}{k} \cdot \psi \cdot \frac{1}{T}. \quad (1a)$$

Trägt man also $1/T$ als Abszisse, $\log J - 2 \log T$ als Ordinate auf, so müssen die gefundenen Punkte auf der „lichtelektrischen Geraden“ liegen. In Fig. 2

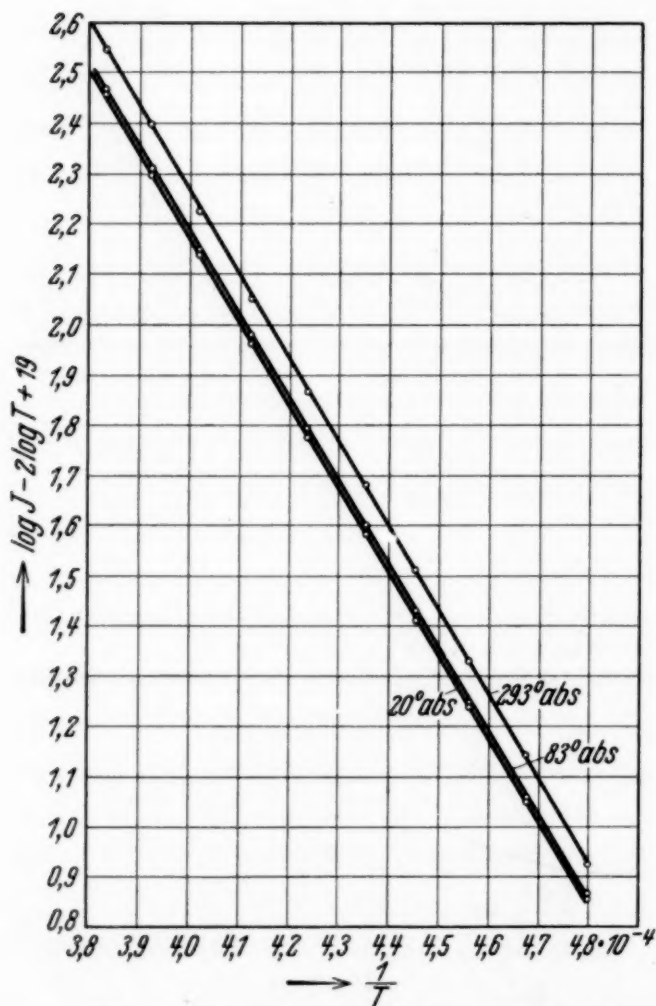


Fig. 2. Gemessene lichtelektrische Geraden einer Berylliumoberfläche bei 293°, 83° und 20° abs.

sind die den Werten der Tabelle 1 entsprechenden lichtelektrischen Geraden eingezeichnet. Da sie parallel verlaufen, ist das Austrittspotential bei einer reinen Berylliumoberfläche in der Tat von Zimmertemperatur bis zu 20° abs. herunter unabhängig von der Kathodentemperatur ϑ . Die genauere Berechnung mittels der Methode der kleinsten Quadrate ergibt für ψ die Werte der Tab. 2.

Ebenso wie das Austrittspotential ist naturgemäß auch die nach Gleichung (2) hieraus berechnete wahre Grenzwellenlänge λ' innerhalb der einige Promille betragenden Meßfehler von

der Kathodentemperatur unabhängig. Bei Beryllium vermag also auch die mit abnehmender Temperatur verbundene Verkleinerung der Gitterabstände das Austrittspotential nicht wesentlich zu beeinflussen.

Während ψ konstant bleibt, vermindert sich M mit abnehmender Temperatur, da die Zahl der emittierenden Stellen kleiner wird, wenn die bei höherer Temperatur infolge der thermischen Zusatzenergie ausgesandten Elektronen fortfallen. Der neuen Elektronentheorie entsprechend nimmt M von 293 bis 83° abs. stärker (um 22 %) ab, als von 83 bis 20° abs. (um 5 %), obwohl die Temperatur im zweiten Fall auf $\frac{1}{4}$, im ersten auf $\frac{1}{3,5}$ sinkt.

b) *Spektrale Empfindlichkeitskurve einer Berylliumkathode bei 293 und 83 bzw. 293 und 20° abs.* Wegen der quadratischen Abnahme der Energie

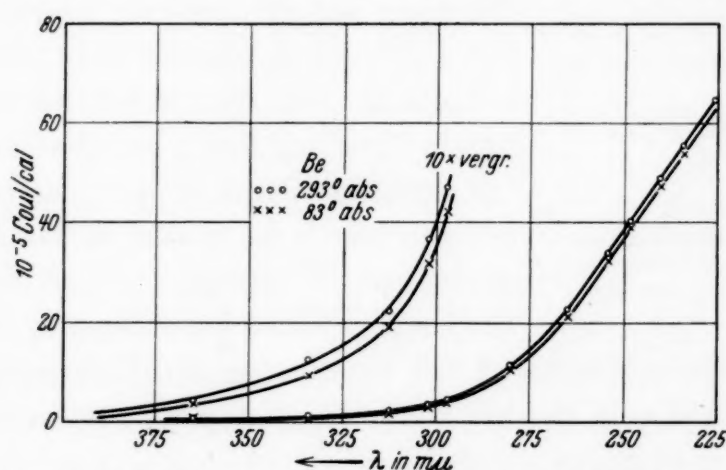


Fig. 3a. Empfindlichkeitskurve eines Berylliumspiegels bei 293° und 83° abs.

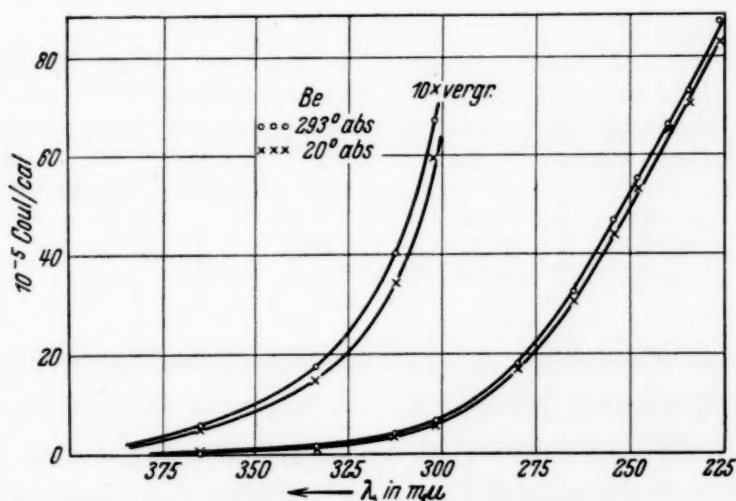


Fig. 3b. Empfindlichkeitskurve eines Berylliumspiegels bei 293° und 20° abs.

der freien Metallelektronen sollte sich die Empfindlichkeitsverminderung mit abnehmender Temperatur um so weniger bemerkbar machen, je niedriger das untersuchte Temperaturgebiet liegt. Um dies zu prüfen, wurde einmal die Empfindlichkeitskurve eines Berylliumspiegels bei 293 und 83° abs., ein andermal die Kurve eines solchen Spiegels bei 293 und 20° abs. untersucht. Die erhaltenen Werte sind in Tabelle 3, sowie in Fig. 3a und b eingetragen.

Wie man aus dem Vergleich der vierten und siebenten Kolonne von Tabelle 3 erkennt, welche die Empfindlichkeit bei 83 bzw. 20° abs. im Verhältnis zur Empfindlichkeit bei 293° abs. wiedergeben, ist die Empfind-

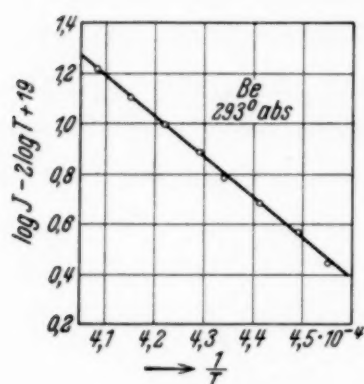


Fig. 4.

Gemessene lichtelektrische Gerade eines Berylliumspiegels bei 293° abs.

lichkeitsabnahme bei Abkühlung auf 83° innerhalb der Meßfehlergrenzen dieselbe, wie die bei Abkühlung auf 20° abs. Dies ist auch auf Grund der Fowlerschen Gleichung (4b) zu erwarten. Eine direkte Anwendung dieser Gleichung auf die gesamte Empfindlichkeitskurve erwies sich zwar als nicht durchführbar, vermutlich, weil die größte Zahl der Meßpunkte (von 313,2 mμ an abwärts) zu weit von der langwelligen Grenze entfernt liegt, so daß sich bereits die stärker an das Metallgitter gebundenen Elektronen bemerkbar machen.

Wir konnten jedoch durch Messung der Gesamtemission in Abhängigkeit von der Temperatur der Wolfram-Lampe das Austrittspotential ψ in gleicher Weise wie in Abschnitt a) bestimmen und mit Hilfe von ψ die zu erwartende Empfindlichkeitsänderung bei Abkühlung von 83 auf 20° abs. berechnen.

Tabelle 4.

Lichtelektrische Gesamtemission J der zu Fig. 3b gehörenden Berylliumoberfläche bei 293° abs.

T° abs.	J in 10^{-12} Amp.	T° abs.	J in 10^{-12} Amp.	T° abs.	J in 10^{-12} Amp.
2200	1,365	2303	3,28	2407	7,55
2230	1,852	2335	4,24	2450	9,95
2270	2,500	2370	5,42		

Tabelle 4 zeigt zunächst die Gesamtemission der Berylliumoberfläche, deren Empfindlichkeitskurve Fig. 3b wiedergibt.

Die nach Gleichung (1a) berechnete lichtelektrische Gerade ist in Fig. 4 eingezeichnet. Die Berechnung aus der Neigung der Geraden ergibt

$$\psi = 3,280 \text{ Volt und } \lambda' = 376,2 \text{ m}\mu^1).$$

Für die Berechnung der zu erwartenden Empfindlichkeitsänderung bilden wir das Verhältnis i_1/i_2 der Empfindlichkeiten nach Gleichung (4b)

¹⁾ Das Austrittspotential dieser Oberfläche unterscheidet sich also verhältnismäßig wenig von dem der Berylliumkathode in Abschnitt a), für die $\psi = 3,312$ Volt gefunden wurde.

bei den Kathodentemperaturen ϑ_1 und ϑ_2 , indem wir die Potenzen von e in Gleichung (4b) vernachlässigen, was zulässig ist, da bei tiefen Temperaturen

$$e^{-\delta} \ll \frac{\delta^2}{2}.$$

In unserem Fall z. B. ist selbst für den der langwelligen Grenze am nächsten liegenden Meßpunkt bei 365,5 m μ bereits bei 293° abs.

$$e^{-\delta} = 3,10^{-4} \quad \text{und} \quad \frac{\delta^2}{2} = 32.$$

Somit ergibt sich

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{\vartheta_1^2 + \alpha (\nu - \nu')^2}{\vartheta_2^2 + \alpha (\nu - \nu')^2}, \quad (6)$$

wobei

$$\alpha = \frac{3 h^2}{\pi^2 k^2} = 6,96 \cdot 10^{-22}.$$

Setzt man nun in Gleichung (6) $\vartheta_1 = 20^\circ$, $\vartheta_2 = 83^\circ$ abs. ein, so erhält man

$$\frac{i_{20}}{i_{83}} = 0,983,$$

d. h. die bei Abkühlung von 83 auf 20° abs. zu erwartende Empfindlichkeitsänderung für $\lambda = 365,5$ m μ liegt innerhalb der Meßfehlergrenzen, was mit dem Ergebnis der Tabelle 3 übereinstimmt.

Für die Empfindlichkeitsabnahme bei Abkühlung von 293 auf 83° abs. ergibt Gleichung (6) für $\lambda = 365,5$ m μ

$$\frac{i_{83}}{i_{293}} = 0,83,$$

während der beobachtete Wert 0,85 beträgt. Die beobachtete Empfindlichkeitsabnahme stimmt also mit der berechneten für die der langwelligen Grenze $\lambda' = 376$ m μ benachbarte Wellenlänge $\lambda = 365,5$ m μ innerhalb der Meßfehlergrenzen überein. Für $\lambda = 334,1$ m μ ist eine solche Übereinstimmung wegen der nun hinzutretenden stärker an das Metallgitter gebundenen Elektronen nicht mehr zu erwarten.

c) *Spektrale Empfindlichkeitskurve einer Wismutkathode bei 293 und 83° abs.* Die Prüfung von Gleichung (6) in unmittelbarer Nähe der langwelligen Grenze läßt sich mit Hilfe von Empfindlichkeitsmessungen an einem Wismutspiegel vornehmen, dessen langwellige Grenze bei 278 m μ lag, also in der Nachbarschaft einer größeren Zahl von Meßpunkten.

Tabelle 5 und Fig. 5 enthalten die Empfindlichkeitswerte bei $\vartheta = 293$ und 83° abs.; Fig. 6 gibt die nach Gleichung (3) bzw. (4) berechnete Fowlersche Kurve und die um ein und denselben Betrag parallel verschobenen Meßpunkte wieder. Wie man aus Fig. 6 ersieht, ist Gleichung (3) bzw. (4) gut erfüllt, da alle Meßpunkte jetzt der langwelligen Grenze genügend benachbart liegen. Aus der für die Deckung notwendigen Horizontalverschiebung berechnen sich bei den Kathodentemperaturen ϑ folgende Werte für ψ und λ' :

bei $\vartheta = 293^\circ$ abs.: $\psi = 4,37$ Volt; $\lambda' = 282 \text{ m}\mu$,

bei $\vartheta = 83^\circ$ abs.: $\psi = 4,43$ Volt; $\lambda' = 278 \text{ m}\mu$.

Der Unterschied von 1,4% liegt innerhalb der Fehlergrenzen.

Tabelle 5.

Lichtelektrische Empfindlichkeit i einer Wismutoberfläche bei $\vartheta = 293^\circ$ und 83° abs.

Wellenlänge in $\text{m}\mu$	Lichtelektrische Empfindlichkeit in 10^{-5} Coul/cal		Wellenlänge in $\text{m}\mu$	Lichtelektrische Empfindlichkeit in 10^{-5} Coul/cal	
	$\vartheta = 293^\circ$ abs.	$\vartheta = 83^\circ$ abs.		$\vartheta = 293^\circ$ abs.	$\vartheta = 83^\circ$ abs.
269,9	0,0522	0,0468	239,9	1,091	1,129
265,5	0,1344	0,1232	237,8	1,218	1,260
257,6	0,299	0,268	234,5	1,500	1,450
254,0	0,432	0,407	230,0	1,650	1,690
248,2	0,709	0,680			

Aus dem Verlauf der Empfindlichkeitskurve kann man unter Verwendung der Planckschen Strahlungsgleichung die lichtelektrische Gesamtemission und die lichtelektrische Gerade berechnen und aus deren Verlauf ebenfalls das Austrittspotential bzw. die langwelligen Grenzen ermitteln¹⁾. Die berechneten Werte der lichtelektrischen Gesamtemission enthält Tabelle 6.

Tabelle 6.

Aus der Empfindlichkeitskurve berechnete lichtelektrische Gesamtemission J für einen Wismutspiegel bei $\vartheta = 293$ und 83° abs.

T° abs.	Lichtelektrische Gesamtemission in Amp.	
	$\vartheta = 293^\circ$ abs.	$\vartheta = 83^\circ$ abs.
1000	$0,975 \cdot 10^{-25}$	$0,867 \cdot 10^{-25}$
1200	$0,911 \cdot 10^{-21}$	$0,8245 \cdot 10^{-21}$
1400	$0,6675 \cdot 10^{-18}$	$0,6155 \cdot 10^{-18}$
1600	$0,986 \cdot 10^{-16}$	$0,920 \cdot 10^{-16}$
1800	$0,4954 \cdot 10^{-14}$	$0,4748 \cdot 10^{-14}$

¹⁾ R. Suhrmann, l. c.

Aus ihnen berechnen sich¹⁾ für r in Gleichung (1) die folgenden Werte: bei $\vartheta = 293^\circ$ abs. $r = 2,6$, bei $\vartheta = 83^\circ$ abs. $r = 3,0$. Die mit diesen r -Werten aus den Zahlen der Tabelle 6 errechneten lichtelektrischen Geraden zeigt Fig. 7. Die Richtungsfaktoren der Geraden ergeben:

bei $\vartheta = 293^\circ$ abs.:

$$\psi = 4,48 \text{ Volt};$$

$$\lambda' = 275 \text{ m}\mu,$$

bei $\vartheta = 83^\circ$ abs.:

$$\psi = 4,46 \text{ Volt};$$

$$\lambda' = 277 \text{ m}\mu.$$

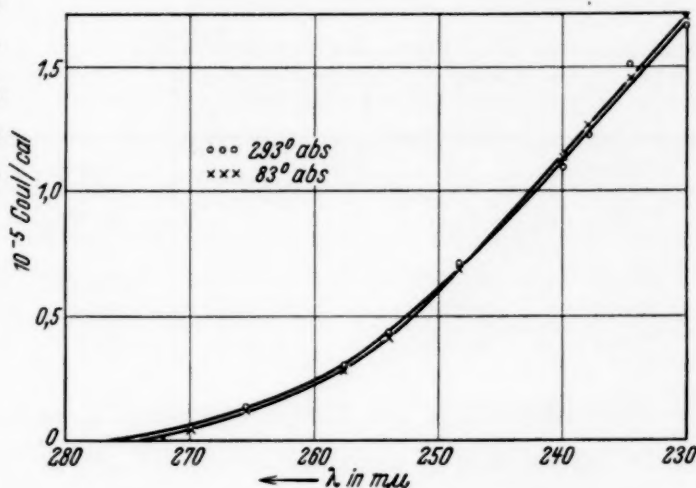


Fig. 5. Lichtelektrische Empfindlichkeitskurve eines Wismutspiegels bei 293 und 83° abs.

Auch diese Werte unterscheiden sich innerhalb der Fehlergrenzen nicht voneinander und stehen in gutem Einklang mit den nach der Fowlerschen

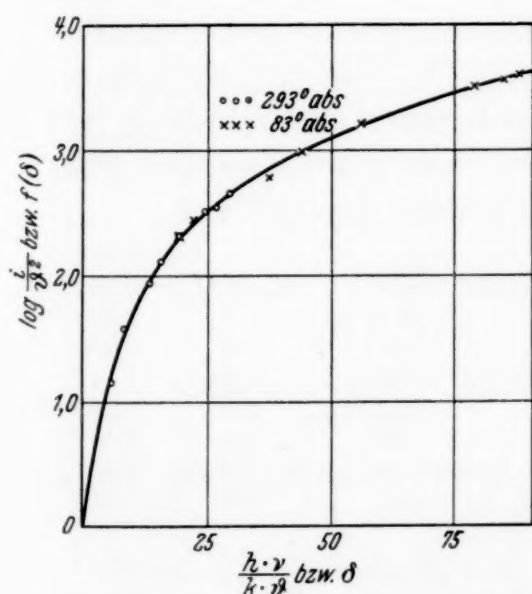


Fig. 6. Ausgezogene Kurve: nach Gleichung (3) und (4) berechnete Fowlersche Kurve. Eingetragene Punkte: Meßwerte bei 293 u. 83° abs.

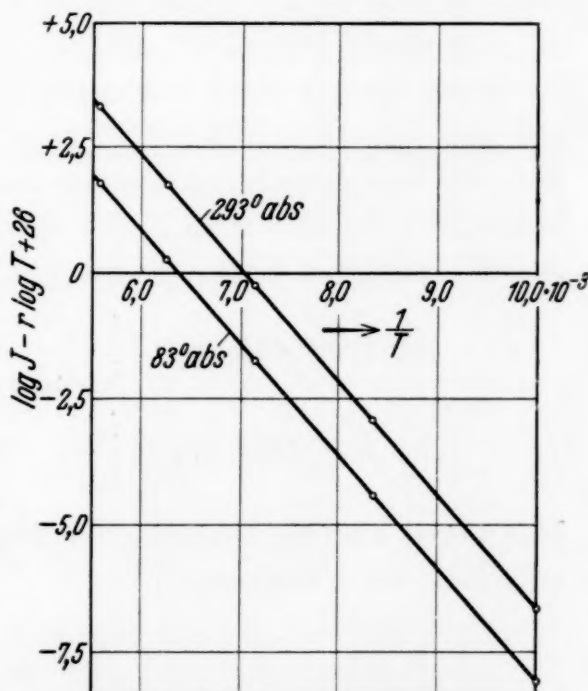


Fig. 7. Berechnete lichtelektrische Geraden eines Wismutspiegels bei 293 und 83° abs.

Methode ermittelten. Als Mittelwert erhält man für den Wismutspiegel $\lambda' = 278 \text{ m}\mu$.

¹⁾ R. Suhrmann, ZS. f. Phys. 54, 99, 1929.

Zur Prüfung von Gleichung (6) sind in Tabelle 7 die nach Gleichung (6) berechneten und die beobachteten Verhältnisse i_{83}/i_{293} eingetragen.

Tabelle 7.

Nach Gleichung (6) berechnete und beobachtete Empfindlichkeitsabnahme bei Abkühlung von $\vartheta = 293^\circ$ auf $\vartheta = 83^\circ$ abs.

Wellenlänge λ in $m\mu$	$(i_{83}/i_{293})_{\text{ber.}}$	$(i_{83}/i_{293})_{\text{beob.}}$	Wellenlänge λ in $m\mu$	$(i_{83}/i_{293})_{\text{ber.}}$	$(i_{83}/i_{293})_{\text{beob.}}$
269,9	0,910	0,90	248,2	0,992	0,96
265,5	0,958	0,92	239,9	0,994	1,03
254,0	0,989	0,94	230,0	0,998	1,03

Wie man sieht, stimmt die beobachtete mit der berechneten Empfindlichkeitsabnahme in unmittelbare Nähe von $\lambda' = 278 m\mu$ überein; mit zunehmendem Abstand von λ' wird der Unterschied größer, und zwar ist die beobachtete Abnahme zunächst kleiner, dann größer als die berechnete. Je mehr wir uns also von der langwelligen Grenze entfernen, desto stärker tritt der Einfluß der wirklich freien Elektronen gegenüber einer Temperaturbeeinflussung der ans Gitter stärker gebundenen Elektronen zurück.

Um diesen Befund mit den Ergebnissen der Temperaturbeeinflussung bei hohen Temperaturen vergleichen zu können, haben wir i_1/i_2 einerseits aus den Kurven von Winch¹⁾ entnommen, der eine Silberkathode bei $\vartheta = 873$ und 296° abs. untersuchte und andererseits nach Gleichung (4b) berechnet²⁾, indem wir für λ' den von Fowler nach den Messungen dieses Autors ermittelten Wert $\lambda' = 260,0 m\mu$ benutzten. Es ergab sich

$$\text{für } \lambda = 254,0 m\mu; \left(\frac{i_{296}}{i_{873}} \right)_{\text{ber.}} = 0,535, \left(\frac{i_{296}}{i_{873}} \right)_{\text{beob.}} = 0,41,$$

$$\text{für } \lambda = 248,2 m\mu; \left(\frac{i_{296}}{i_{873}} \right)_{\text{ber.}} = 0,776, \left(\frac{i_{296}}{i_{873}} \right)_{\text{beob.}} = 0,48.$$

Hier liegen also die beobachteten Werte bereits in großer Nähe von λ' unterhalb der berechneten³⁾.

¹⁾ R. P. Winch, l. c. — ²⁾ In diesem Fall kann man Gleichung (6) nicht anwenden, da $e^{-\delta}$ gegenüber $\delta^2/2$ wegen der höheren Temperatur nicht vernachlässigt werden darf. — ³⁾ Bei der Anwendung der gleichen Berechnung auf die Messungen von L. A. Dubridge u. W. W. Roehr (Phys. Rev. **39**, 99, 1932), die entgastes Palladium ($\lambda' = 248,5 m\mu$) untersuchten, liegt das beobachtete Abnahmeverhältnis für $\lambda = 239,9 m\mu$ (also dicht an der langwelligen Grenze) merkwürdigerweise höher als das berechnete

$$\left[\left(\frac{i_{305}}{i_{1078}} \right)_{\text{ber.}} = 0,54, \left(\frac{i_{305}}{i_{1078}} \right)_{\text{beob.}} = 0,63 \right].$$

d) *Spektrale Empfindlichkeitskurve einer reinen Silberkathode, bedeckt mit Kalium in atomarer Verteilung (Bedeckung > optimal) bei 293, 83 und 20° abs.* Für die Untersuchung der mit atomar verteiltem Kalium bedeckten Silberoberfläche bereiteten wir die Zelle in der Weise vor, daß wir zunächst den Silberspiegel durch Verdampfen im Hochvakuum herstellten und nach dem Abschmelzen der Zelle von der Vakuumapparatur Kaliumdampf aus einem seitlichen Ansatzrohr langsam hinzutreten ließen. Nachdem sich das schon früher beobachtete ¹⁾ Maximum bei 343 m μ mit einer Ausbeute von etwa $1 \cdot 10^{-2}$ Coul/cal ausgebildet hatte, das einer die optimale soeben überschreitenden Bedeckung entspricht, wurde das Kaliumansatzrohr abgeschmolzen.

Als Lichtquelle wurde bei dieser Messung sowohl die Quarz-Quecksilberlampe als auch die Wolframlampe verwendet.

Obleich sich in der Zelle atomar verteiltes Kalium befand, waren die Messungen bei verschiedenen Temperaturen auch bei diesen Versuchen sehr gut zu reproduzieren. Tabelle 8 zeigt einige Werte, die abwechselnd bei 293, 83, 293, 83, 20 und 83° abs. erhalten wurden.

Tabelle 8.

Reproduzierbarkeit der Empfindlichkeitswerte eines mit atomar verteiltem Kalium bedeckten Silberspiegels (Bedeckung > optimal) bei verschiedenen Kathodentemperaturen ϑ .

Wellenlänge λ in m μ	Lichtelektrische Empfindlichkeit in 10^{-5} Coul/cal					
	$\vartheta = 293^{\circ}$ abs.	$\vartheta = 83^{\circ}$ abs.	$\vartheta = 293^{\circ}$ abs.	$\vartheta = 83^{\circ}$ abs.	$\vartheta = 20^{\circ}$ abs.	$\vartheta = 83^{\circ}$ abs.
546,1	17,18	15,31	16,80	15,57	15,00	15,83
500,0	55,0	50,7	53,3	50,1	48,0	49,8
404,7	300	266	294	272	267	283
350,0	966	1068	956	1016	1043	1050
313,2	305	284	305	279	286	282
302,2	326	279	322	282	276	281
296,7	345	321	348	316	330	321
265,5	388	425	386	421	432	429
254,0	398	439	399	428	448	438

Tabelle 9 enthält die Mittelwerte der insgesamt gemessenen Empfindlichkeitswerte bei 293, 83 und 20° abs., die in Fig. 8 eingezeichnet sind.

Aus Tabelle 9 ersieht man, daß bei der Wellenlänge, die der langwelligen Grenze am nächsten kommt, der neuen Elektronentheorie entsprechend kein Unterschied der Empfindlichkeit bei 83 und 20° abs. innerhalb der Meßfehler vorhanden ist. Mit zunehmender Entfernung von λ' macht sich jedoch bei

¹⁾ R. Suhrmann u. A. Schallamach, l. c.

Abkühlung von 83 auf 20° abs. ein Temperatureinfluß bemerkbar, der allerdings im Verhältnis zu der Empfindlichkeitsänderung zwischen 293 und

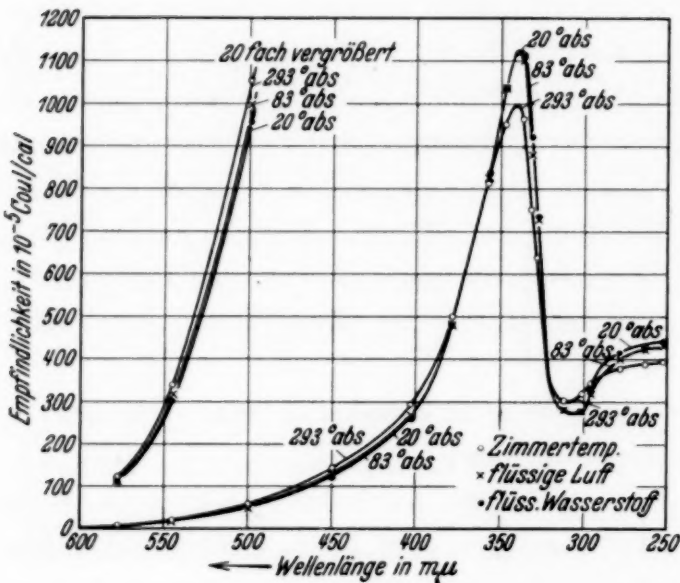


Fig. 8. Empfindlichkeitskurve von atomar verteiltem Kalium auf einem durch Verdampfen im Hochvakuum hergestellten Silberspiegel (Bedeckung > optimal) bei 293, 83 und 20° abs.

83° abs. sehr klein ist. Bei etwa 370 mμ schneiden sich die Empfindlichkeitskurven (Fig. 8) und bewirken hierdurch ein steileres Hervortreten des spektralen Maximums bei 343 mμ. Auch das darauf folgende Minimum ist bei tiefer Temperatur deutlicher ausgeprägt. Auf der kurzwelligen Seite des Minimums ist die Empfindlichkeit bei tiefer Temperatur höher als bei Zimmertemperatur und auch bei Abkühlung

von 80 auf 20° abs. ist noch eine deutliche Empfindlichkeitszunahme festzustellen. Die gesamte prozentuale Empfindlichkeitszunahme bei Abkühlung von 293 bis 20° abs. ist an der Stelle des Minimums fast die gleiche wie auf der kurzwelligen Seite des Minimums.

Tabelle 9.

Lichtelektrische Empfindlichkeit *i* eines mit atomar verteiltem Kalium bedeckten Silberspiegels (Bedeckung > optimal) bei verschiedenen Kathodentemperaturen *θ*.

Wellenlänge λ in mμ	Lichtelektrische Empfindlichkeit in 10 ⁻⁵ Coul/cal			Wellenlänge λ in mμ	Lichtelektrische Empfindlichkeit in 10 ⁻⁵ Coul/cal		
	θ = 293° abs.	θ = 83° abs.	θ = 20° abs.		θ = 293° abs.	θ = 83° abs.	θ = 20° abs.
577,9	5,78	5,63	5,63	334,1	760	885	932
546,1	16,99	15,57	15,00	330,0	646	734	742
500,0	54,2	50,2	48,0	313,2	305	282	286
450,0	143	130,5	123,7	302,2	324	281	276
404,7	297	274	267	296,7	347	319	330
380,0	504	485	486	280,3	384	404	421
360,0	821	830	848	265,5	387	425	432
350,0	961	1045	1043	254,0	399	435	448
340,0	972	1109	1120				

Nehmen wir an, daß der Verlauf der Empfindlichkeitskurve des mit Kalium bedeckten Silbers durch das Vorhandensein einer optischen Anomalie des Silbers bedingt ist, so zeigt sich also, daß der Schnittpunkt der bei zwei verschiedenen Temperaturen erhaltenen Empfindlichkeitskurven auf der langwelligen Seite des Reflexionsminimums vielleicht durch dessen Temperaturabhängigkeit¹⁾ erklärt werden kann. Ferner erkennt man, daß ein Temperatureffekt auch noch in Temperaturgebieten zu beobachten ist, in denen sich die Eigenenergie der freien Elektronen mit der Temperatur so wenig ändert, daß eine Empfindlichkeitsabnahme infolge der Verminderung der thermischen Zusatzenergie nicht mehr eintritt. Die Temperaturbeeinflussung macht sich allerdings nicht mehr in der Nähe der langwelligen Grenze bemerkbar, sondern in den Spektralbereichen, in welchen die stärker ans Metallgitter gebundenen Elektronen ausgelöst werden. Sie ist um so kleiner, je tiefer die Temperatur gesunken ist, aber bei Abkühlung von 83 auf 20° abs. noch deutlich zu erkennen.

Der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft sind wir für ihre wertvolle Unterstützung mit experimentellen Hilfsmitteln zu größtem Dank verpflichtet.

¹⁾ Vgl. J. Ebeling, ZS. f. Phys. 32, 489, 1925.

Die Rotationsschwingungsbande der Blausäure bei 10381 Å.

Von **W. Scheib** und **K. Hedfeld** in Bonn.

(Eingegangen am 15. September 1934.)

Das Rotationsschwingungsspektrum der Blausäure wird im Bereiche 7600 bis 11500 Å mittels photographischer Methoden an einem großen Rowland-Konkavgitter aufgenommen. Außer den bereits von Badger und Binder aufgenommenen Banden bei 7912 und 8563 Å wird eine neue Bande bei 10381 Å gefunden. Die lineare Struktur der HCN-Molekel ermöglicht die Analyse der Rotationsstruktur durch Anwendung der Kombinationsbeziehungen zweiatomiger Moleküle. Das Trägheitsmoment wird zu $20,00 \cdot 10^{-40} \text{ g cm}^2$ für den Anfangs- und $19,44 \cdot 10^{-40} \text{ g cm}^2$ für den Endzustand bestimmt. Der Kernabstand der C—N-Bindung beträgt $1,17 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$.

Die Analyse der Rotationsfeinstruktur mehratomiger Moleküle bietet so viele Schwierigkeiten mannigfacher Art, daß es bisher erst bei einigen einfachen Molekülen gelungen ist, sie vollständig durchzuführen. Mecke¹⁾ und seine Mitarbeiter haben das Rotationsschwingungsspektrum des Wasserdampfes zu entwirren vermocht, ohne daß es bisher gelungen wäre, nach diesem Schema andere Moleküle von Dreiecksgestalt zu analysieren. Aber schon vorher war mit Erfolg versucht worden, die bei der Einordnung zweiatomiger Spektren verwandten Kombinationsbeziehungen auf solche mehratomigen Moleküle anzuwenden, bei denen man eine lineare Anordnung der Atome und damit nur *ein* Trägheitsmoment erwarten durfte, nämlich beim Acetylen, C_2H_2 ²⁾, und der Blausäure, HCN³⁾. Ja, selbst die Analyse des sich aus zwei CH_2 -Radikalen aufbauenden Äthylens, C_2H_4 ⁴⁾, ließ sich auf das Problem eines annähernd symmetrischen Kreisels zurückführen, dessen Rotationscharakter noch ganz dem eines gestreckten zweiatomigen Moleküls entspricht. Die von Adel und Barker⁵⁾ angegebene Schwingungsanalyse

¹⁾ R. Mecke, ZS. f. Phys. **81**, 313, 1933; W. Baumann u. R. Mecke, ebenda **81**, 445, 1933; F. Freudenberger u. R. Mecke, ebenda **81**, 465, 1933. —

²⁾ K. Hedfeld u. R. Mecke, ebenda **64**, 151, 1930; W. H. J. Childs u. R. Mecke, ebenda **64**, 162, 1930; R. Mecke, ebenda **64**, 173, 1930; K. Hedfeld u. P. Lueg, ebenda **77**, 446, 1932. — ³⁾ R. M. Badger u. J. L. Binder, Phys. Rev. (2) **37**, 800, 1931. — ⁴⁾ W. Scheib u. P. Lueg, ZS. f. Phys. **81**, 764, 1933. — ⁵⁾ A. Adel u. E. F. Barker, Phys. Rev. (2) **45**, 277, 1934.

des HCN-Spektrums, nach der in dem heute mittels photographischer Methoden zugänglichen Gebiet eine ganze Anzahl von Rotationsschwingungsbanden zu erwarten sind, ließ es als lohnend erscheinen, sich noch einmal mit dem Problem des Blausäuremoleküls zu befassen. Da jedoch die Herstellung großer Schichtdicken wegen der Giftigkeit des Gases und dem über Zimmertemperatur liegenden Siedepunkt nicht leicht zu bewerkstelligen ist, andererseits die Absorption des Gases an sich schon gering ist, und schließlich fast alle im Schwingungsspektrum angegebenen Banden als Kombinationsschwingungen gedeutet sind, konnte man schon im voraus erwarten, daß die Ausbeute bei der Durchmusterung des Gebietes von 7600 bis 11500 Å nicht allzugroß sein würde. So erhielten wir denn auch außer den bereits von Badger und Binder¹⁾ gefundenen Banden bei 7912 und 8563 Å nur eine neue Bande, nämlich die als $3 \nu_3$ gedeutete bei 10381 Å. Es ist möglich, daß auch die bei 11300 Å zu erwartende Bande $4 \nu_1$ vorhanden ist. Sie ist jedoch von den Linien einer an gleicher Stelle liegenden Wasserdampfbande überlagert und außerdem so schwach, daß von einer Ausmessung abgesehen wurde. Auch die beiden von Badger und Binder angegebenen Banden konnten nicht wesentlich besser erhalten werden, so daß wir von der Mitteilung unserer Messungen an diesen Banden absehen, vielmehr die aus der Analyse der neuen Bande bei 10381 Å sich ergebenden Werte der Molekülkonstanten als Bestätigung der von den beiden Forschern angegebenen betrachten. Auch hinsichtlich der Beziehungen unserer Messungen zu denen im fernen Ultrarot, der Diskussion der Struktur des Blausäuremoleküls, der Berechnung der Dissoziationsenergie und der Schwingungsstruktur sei auf die beiden Arbeiten von Badger und Binder und Adel und Barker verwiesen.

Die Aufnahmen wurden mit einem großen Rowland'schen Konkavgitter von 6,3 m Krümmungsradius mit einer Dispersion von 2,54 Å/mm gemacht. Als Absorptionsrohr diente ein Eisenrohr von 6 m Länge, durch das das Licht eines kleinen Einfadenlämpchens mit etwa 7 Amp. Strombelastung hindurchgeschickt wurde. Die zweite Ordnung des Gitterspektrums wurde durch ein Rotfilter ausgeblendet. Das Blausäuregas wurde aus Natriumcyanid und Schwefelsäure entwickelt. Als Plattenmaterial dienten Agfa-Infrarotplatten 810, 855, 950 und 10600. Die letzteren wurden uns von der Filmfabrik Wolfen-Bitterfeld zur Verfügung gestellt, wofür wir auch an dieser Stelle unseren Dank sagen. Die Belichtungszeit betrug etwa 40 Stunden. Da die Bande relativ schwach ist, verzichteten wir auf die

¹⁾ Siehe Fußnote 3, S. 792.

Angabe von Intensitäten und bemerken nur, daß die beiden Zweige der Bande ungefähr gleiche Intensität haben und daß, wie zu erwarten ist, kein Intensitätswechsel innerhalb der beiden Zweige stattfindet. Eisenlinien dritter Ordnung dienten als Normale bei der Ausmessung. Obwohl die Bande auf der Platte recht gut sichtbar ist, war eine direkte Ausmessung der Linien unter der Meßmaschine nicht möglich. Die Linien wurden daher auf der Platte anpunktiert und die Punkte unter der Meßmaschine gemessen. Die Genauigkeit dürfte, zumal die Linien noch diffus sind, demnach 0,1 bis 0,4 Å nicht übersteigen, genügt aber für eine eindeutige Zuordnung.

Tabelle 1.

J	R	P	$\Delta_2 F'(J)$	$\frac{\Delta_2 F'(J)}{J + 1/2}$	$\Delta_2 F''(J)$	$\frac{\Delta_2 F''(J)}{J + 1/2}$
0	9635,61?					
1	38,60?	9630,36?	8,24?	5,49?	8,44?	5,63?
2	41,01	27,17	13,84	5,54	14,30	5,72
3	43,73	24,30	19,43	5,55	20,06	5,73
4	46,20	20,95	25,25	5,61	26,12	5,80
5	48,54	17,61	30,93	5,62	31,71	5,77
6	51,40	14,49	36,91	5,68	36,93	5,68
7	53,51	11,61	41,90	5,59	43,80	5,84
8	55,64	07,60	48,04	5,65	49,11	5,78
9	58,30	04,40	53,90	5,67	54,74	5,76
10	60,31	00,90	59,41	5,66	60,80	5,79
11	62,17	9597,50	64,67	5,62	66,35	5,77
12	64,50	93,96	70,54	5,64	71,72	5,74
13	66,52	90,45	76,07	5,63	78,05	5,78
14	68,52	86,45	82,07	5,66	83,61	5,77
15	70,52	82,91	87,61	5,65	89,53	5,78
16	72,26	78,99	93,27	5,65	95,39	5,78
17	74,13	75,13	99,00	5,66	101,12	5,78
18		71,14			107,28	5,80
19		66,85				
20		62,34				
21		58,69				

Die lineare Struktur des Blausäuremoleküls gestattet die Anwendung der Kombinationsbeziehungen zweiatomiger Moleküle zur Analyse. Die Rotationsniveaus des oberen und unteren Schwingungszustandes wurden durch die Beziehungen getrennt:

$$\Delta_2 F'(J) = R(J) - P(J) = F'(J+1) - F'(J-1) \sim 4B'(J+1/2)$$

$$\Delta_2 F''(J) = R(J-1) - P(J+1) = F''(J+1) - F''(J-1) \sim 4B''(J+1/2).$$

Tabelle 1 gibt die Schwingungszahlen der Linien des P - und R -Zweiges (ein Q -Zweig konnte nicht beobachtet werden), bezogen auf Luft, sowie die

aus den Kombinationsbeziehungen errechneten Werte der $\Delta_2 F'(J)$ und $\Delta_2 F''(J)$ und die durch die jeweiligen $J + \frac{1}{2}$ dividierten Werte dieser Größen.

Die der Quantenzahl $J = 1$ zuzuschreibenden Frequenzen sind unsicher, daher auch die daraus errechneten Werte von $\frac{\Delta_2 F'(J)}{J + \frac{1}{2}}$ und $\frac{\Delta_2 F''(J)}{J + \frac{1}{2}}$. Die Werte für $B (J = 0)$ wurden aus der Reihe der B -Werte graphisch extrapoliert. Sie betragen für $B' = 1,425$ und für $B'' = 1,385$. Daraus errechnet sich das Trägheitsmoment der HCN-Molekel zu $20,00 \cdot 10^{-40} \text{ g cm}^2$ für den Anfangs- und $19,44 \cdot 10^{-40} \text{ g cm}^2$ für den Endzustand. Der Kernabstand der $\text{C} \equiv \text{N}$ -Bindung beträgt etwa $1,17 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$, die Schwingungszahl der Nulllinie errechnet sich zu $\nu_0 = 9632,9$.

Bonn, August 1934.

Atomzertrümmerungsversuche mit H und He an leichten Elementen.

Von **R. Döpel** in Würzburg.

Mit 5 Abbildungen. (Eingegangen am 11. September 1934.)

Zertrümmerung von Be mit Protonen zwischen 80 und 120 kV; Ausbeute bei 120 kV wie bei Li und Bor; Reichweite 6,5 mm. Die Zerfallszeit von Li, Be und Bor ist kleiner als 0,15 Sekunden. Die Zertrümmerbarkeit von Li, Be und Bor mit He liegt unter der Beobachtungsgrenze.

In bezug auf Atomzertrümmerungsversuche durch Protonen nahm Be unter den leichten Elementen bisher eine merkwürdige Ausnahmestellung ein. Während der Zertrümmerungsprozeß bei Li weitgehend geklärt ist¹⁾ und über die Zertrümmerung von Bor und Kohlenstoff jedenfalls bereits detailliertes, deutungsfähiges Material vorliegt, scheint bei Be die Zertrümmerung mit Protonen überhaupt noch als solche in Frage gestellt zu sein. Dafür folgende Übersicht über die bisherigen Ergebnisse:

Tabelle 1. Bisherige Zertrümmerungsversuche mit $H^1 \rightarrow Be$.

Beobachter	Reichweite	Zertrümmerungsschwelle in kV	Ausbeute relativ zu Li und Bor
Cockcroft u. Walton, Proc. Roy. Soc. London (A) 137 , 240, 1932	1. Einige wenige helle Szintillationen	(250 kV?)	$W_{Be} = 6 \cdot 10^{-3} W_{Li}$ $= 15 \cdot 10^{-3} W_B$
	2. Eine viel größere Zahl schwacher Szin- tillationen; $R > 1,2$ cm	500 kV	—
F. Kirchner, Phys. ZS. 34 , 781, 1933	2 ... 4 cm (Wilsonkammer)	(130 kV?)	Mehrere Zehner- potenzen kleiner als bei Li und B
Oliphant u. Ruther- ford, Proc. Roy. Soc. London (A) 141 , 272, 1933	Nicht bestimmbar	200 kV	Kleiner Effekt evtl. Borverunreinigung
Livingston, Hender- son u. Lawrence, Phys. Rev. 44 , 215, 1933	3,3 cm bei wenigen $R = 6,6$ cm (Spitzenzähler)	900 kV	—

¹⁾ J. D. Cockcroft u. T. S. Walton, Proc. Roy. Soc. London (A) **137**, 237, 1932; F. Kirchner, Phys. ZS. **34**, 777, 1933; M. L. Oliphant, E. S. Shire u. B. M. Crowther, Nature **133**, 377, 1934.

Ferner liegen eine Anzahl amerikanische Kurzberichte über Zertrümmerung von Be durch H^2 und He vor, bei denen je nachdem Protonen, Neutronen, α -Teilchen und γ -Quanten beobachtet wurden, stets aber nur bei Spannungen über 600 kV.

Alle Beobachtungen haben gemeinsam: viel höhere Zertrümmerungsschwelle als bei Li und Bor [20 bzw. 30 kV¹⁾] und um mehrere Zehnerpotenzen kleinere Ausbeute. Daher läßt sich besonders bei den höheren Spannungen in Anbetracht der durchaus nicht charakteristischen Reichweite wahre Be-Zertrümmerung von Zertrümmerung an Verunreinigungen nur bei sehr kritischer Beobachtungsmethode unterscheiden²⁾.

Die Zertrümmerung von Be durch H muß also nach den bisherigen Versuchen als fraglich erscheinen; jedenfalls hat sie quantitativ einen ganz anderen Charakter als die von Li und Bor. Andererseits liegt nun nach Gamow die Eindringungswahrscheinlichkeit eines Protons in einen Kern für Be gerade zwischen der für Li und Bor. Es scheint also hier entweder ein Widerspruch mit der Gamowschen Theorie vorzuliegen, oder aber der Be-Kern verhält sich gegenüber dem eingedrungenen Proton so stabil, daß dieses den Kern wieder verlassen kann, ohne in diesem eine bleibende Veränderung hervorzurufen. Letzterem steht die Tatsache gegenüber, daß der Be-Kern durch α -Teilchen ziemlich leicht beeinflußt wird (γ - und Neutronenemission).

Deshalb wurde die Zertrümmerung von Be durch Protonen erneut in Angriff genommen; ferner wurden geprüft: die Zertrümmerungswahrscheinlichkeit beim He-Stoß und die Lebensdauer zertrümmerbarer Kerne nach Eindringen des Protons.

§ 1. Methode und Apparatur.

Zur Erzeugung rascher Protonen wurde die W. Wiensche Nachbeschleunigungsmethode benutzt; diese Methode ist in dem hochspannungstechnisch beherrschbaren Bereich allen anderen Methoden infolge der hohen Protonenströme überlegen.

a) *Hochspannungserzeugung.* Die Hochspannungsanlage wurde im Institut aus zum Teil alten Einzelteilen gebaut und speziell der W. Wienschen Methode angepaßt. Da das Entladungsrohr relativ hohe Ströme erfordert (5...50 Milliamp.), das Beschleunigungsrohr dagegen bei kleinerem Strom hohe Spannung, so wurde für ersteres ein Transformator

¹⁾ R. Döpel, ZS. f. Phys. **81**, 821, 1933. — ²⁾ Siehe die schönen, vorbildlichen Versuche von J. D. Cockcroft und T. S. Walton, Proc. Roy. Soc. London (A) **144**, 704, 1934.

in Greinacher-Schaltung (H.-T.), für das letztere dagegen ein einphasig ausgenutzter Induktor (I.) benutzt.

Fig. 1 zeigt die Gesamtanlage (halbschematisch). K_1, K_2, K_3 sind Meyrowsky-Kondensatoren von 0,01, 0,05, 0,05 Mikrofarad. Z.-T. ist ein im Institut gebauter Zwischentransformator 2:1, der die vom Induktor herrührende hohe Isolationsbeanspruchung des Hochspannungstransformators zum Teil übernimmt. $G_{1,2,3}$ sind vertikal angeordnete Glühventile; die zugehörigen Heiztransformatoren H.-T._{1,2,3} dienen gleichzeitig als Durchführung durch den Lichtschutz der Glühventile. Unvermeidbare plötzliche Entladungen einer Kondensatoren-Hochspannungsquelle

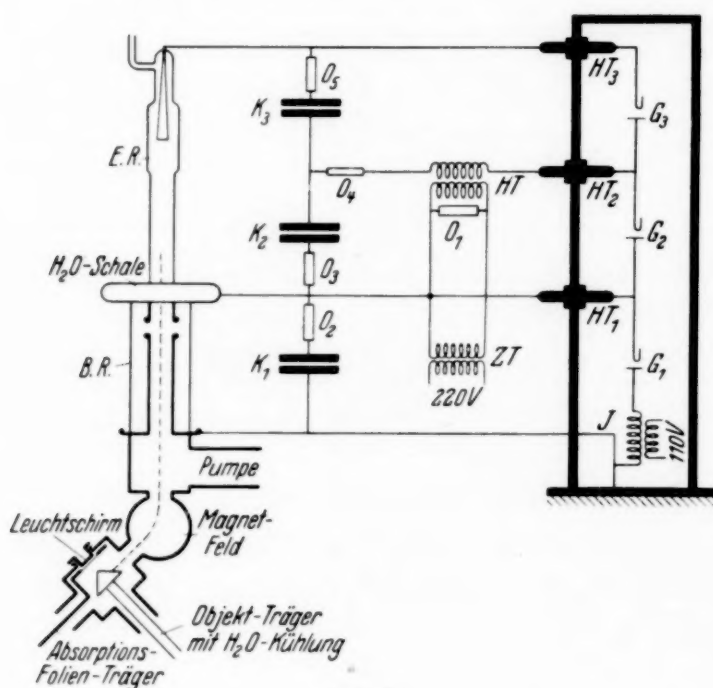


Fig. 1.

Hochspannungsanlage und Kanalstrahlrohr.

bilden bekanntlich immer eine Wanderwellengefahr für das Leitungsnetz der Umgegend. Deshalb wurden an den mit O_n bezeichneten Stellen Ocelit-Widerstände¹⁾ eingebaut, wodurch diese Gefahr weitgehend herabgesetzt wurde.

b) Kanalstrahlapparatur. Fig. 2 zeigt die Zertrümmerungsanlage. In dem durch die Flaschen isolierten Blechbehälter befindet sich die Gas-erzeugungs- und Durchströmungsanlage (H_2 , O_2 , He); der heraushängende

¹⁾ Der Firma Conradty, Nürnberg (Elektroden und galvanische Kohlen) bin ich für mehrere Ocelit-Widerstände zu freundlichem Dank verpflichtet. Die normale Verwendungsart dieser Widerstände als Überspannungsschutz ist eine andere; sie haben sich aber auch in der vorliegenden Schaltung gut bewährt.

Zylinder ist ein Blei-Röntgenstrahlenschutz. Es wurden Kanalstrahl-Rohr-typen aus Glas, Quarz und Metall benutzt. Bei hoher Spannung hat sich das bei der ersten Arbeit benutzte Glasrohr bis jetzt als am vorteilhaftesten bewährt (Preis und Ausbeute). Die auf Hochspannung befindliche Kathode muß selbstverständlich H_2O -gekühlt sein. Die Nachbeschleunigung erfolgt

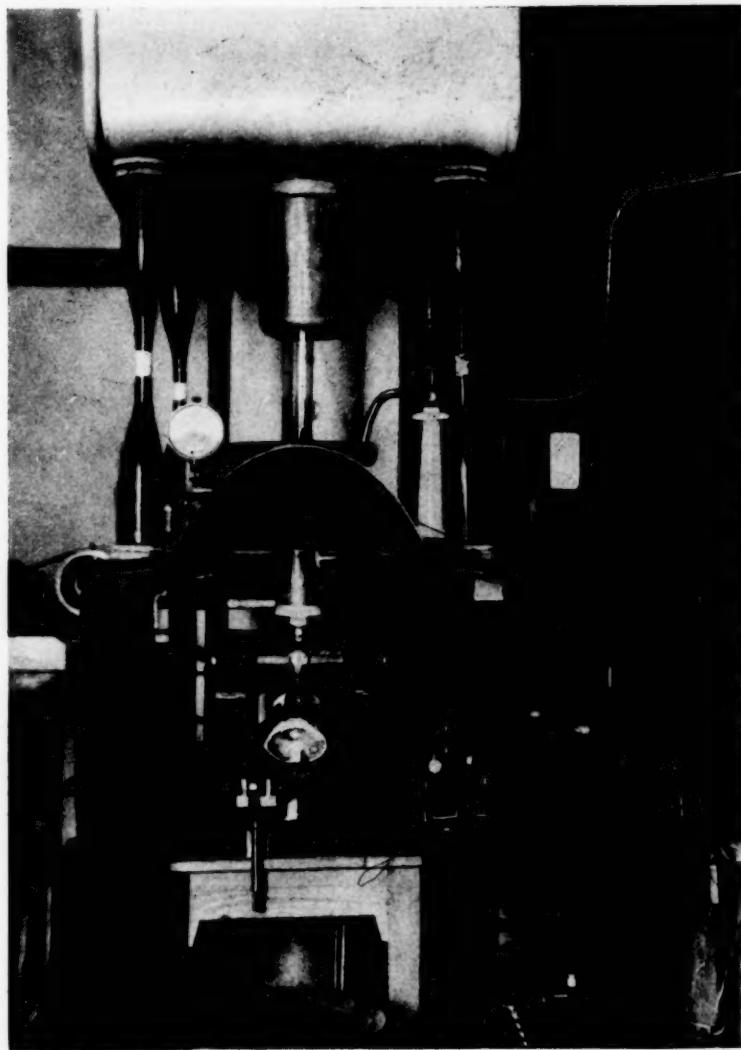


Fig. 2.

Atomzertrümmerungsrohr mit Beobachtungsstand.

in einem Glaszylinder zwischen polierten Messingelektroden. Nachdem der Strahl eine Magnetfeldkammer durchlaufen hat, fällt er auf einen drehbaren, prismatischen Objektträger (H_2O -Kühlung), der einen leichten Vergleich zweier Substanzen ermöglicht. Zwischen Objekt und Leuchtschirm kann ein halbzylindriger Absorptionsfolienträger gedreht werden. Je nach der Reichweite befindet sich der Leuchtschirm im Vakuum oder außerhalb ($F = 120 \text{ mm}^2$, Abstand vom Objekt 18 mm); im letzteren

Falle treten die Strahlen durch eine dünne Cellophanfolie aus ($F = 120 \text{ mm}^2$, Luftäquivalent etwa 1,6 cm). Der Leuchtschirm trägt nach innen zu in allen Fällen einen Lichtschutz aus drei Lagen Al (Luftäquivalent $3 \cdot 0,8 \text{ mm}$).

c) *Beobachtung.* Beobachtet wurde mit Lupe bzw. Spitzenzähler (mit Elektrometer). Bei kräftigen Li- α -Szintillationen wurde gelegentlich mit unbewaffnetem Auge beobachtet, z. B. wenn an der Häufigkeit der Szintillationen kontrolliert werden sollte, ob der magnetisch abgelenkte Protonenstrahl günstig auf den Objektträger fiel. Bei Be dagegen war mit bloßem Auge nur ein verschwommenes Fluktuieren wahrnehmbar; es wurden mehrere Lupen benutzt, u. a. auch ein Zeiss-Orthoskop Okular (Apertur 0,8). Bei größeren Teilchenzahlen wurde ein bestimmter Teil des Gesichtsfeldes abgeblendet, so daß die zu beachtende Zahl möglichst 40 pro Minute nicht überstieg. Die Protonenströme wurden an der Objektstelle mittels Auffänger bestimmt.

§ 2. Zertrümmerung von Be mit Protonen.

Mittels Szintillationsbeobachtung ist die Zertrümmerung von Be mit H nur bemerkbar, wenn die Kanalstrahlen magnetisch oder elektrisch aus der ursprünglichen Bahn abgelenkt werden. Die große Ausbeute an kleinen Reichweiten wurde bereits im vorigen Herbst gefunden und durch einen zweiten Beobachter kontrolliert ($4 < R < 10 \text{ mm}$). Zunächst ließ sich aber diese Beobachtung mit einer gerade zwecks Verstärkung des Effektes umgebauten Apparatur nicht reproduzieren. Im ersten Falle war ein Magnetfeld in den Strahlengang eingeschaltet, im zweiten Falle nicht. Infolgedessen konnten im zweiten Falle die durch die Kanäle dringenden Röntgenstrahlen auf den Objektträger und von da aus zum Teil auf den Leuchtschirm fallen. Da der Leuchtschirm bereits unter Einfluß der durch Kanalstrahlen am Objektträger erzeugten kurzwelligen Strahlung schwach leuchtet, so fällt das von den Röntgenstrahlen herrührende Zusatzleuchten nicht ohne weiteres auf; es genügt aber u. U. gerade, um die schwachen Be-Szintillationen zu überdecken. Es genügt nicht, die Kanalstrahlen des Entladungsraumes zur Seite zu lenken, so daß das Zentrum der Röntgenstrahlquelle aus der Kanalachse gebracht wird. Die störenden Röntgenstrahlen gehen hauptsächlich von der positiven Beschleunigungselektrode aus, an der sie durch Sekundärelektronen erzeugt werden. Erst als die Magnetfeldkammer wieder eingesetzt wurde, war die Zertrümmerung wieder beobachtbar.

a) *Sicherung der Zertrümmerungstatsache.* Szintillationsbeobachtungen beim H-Bombardement sind noch lange kein Beweis für die Zertrümmerung

des beschossenen Elementes. Es wurde deshalb aus Gründen der Kritik zunächst direkt versucht, die Szintillationen auf einen Dreckeffekt zurückzuführen.

1. Verursachung der Szintillation durch gestreute Protonen? Scheidet von vornherein aus, da bereits die Schutzfolie des Leuchtschirmes etwa viermal dicker ist als die Reichweite der Protonen; außerdem würden H-Szintillationen bei 120 kV wohl noch unter der Reizschwelle des Auges liegen.

2. Verunreinigung des Be mit Bor? Zu diesem Zwecke wurden auf der einen Seite des prismatischen Objektträgers Bor, auf der anderen Seite Be angebracht, um beide Zertrümmerungseffekte unmittelbar nacheinander beobachten zu können. Schon der bloße Anblick zeigt, daß beide Effekte nichts gemeinsam haben. Bor zeigt so helle Szintillationen, daß man mit gut disponiertem Auge die hellsten selbst ohne Lupe erkennen kann. Wenn man auf Be herumdreht, sieht man zunächst infolge des vorhergegangenen starken Bor-Eindrucks nichts; nach kurzer Zeit wird aber ein Gewimmel von schwachen Szintillationen bemerkbar, deren Zahl die der Bortrümmer übertrifft. Dieses Gewimmel ist nach Vorschalten von etwa 1 cm Luftäquivalent verschwunden, bei den Bortrümmern dagegen wird durch eine solche Folie nur die Helligkeit etwas beeinträchtigt, während die Zahl der Szintillationen nur wenig geändert wird.

3. Verunreinigung mit Kohlenstoff? Bekanntlich wird an der Auftreffstelle starker Kanalstrahlen stets ein schwarzer Beschlag niedergeschlagen, der hauptsächlich aus Kohlenstoff besteht (Hahnfett und Kittdämpfe). Deshalb wurde auf die eine Seite des Objektträgers eine organische Kohlenstoffverbindung gebracht. Es zeigten sich aber dort nur wenige helle Szintillationen ($R \sim 2$ cm), die mit der Be-Strahlung nichts gemeinsam hatten. Im übrigen wurde das Be fast nach jeder Beobachtungsreihe durch Abschaben gesäubert.

4. Zufällige Eigenschaft eines bestimmten Berylliumbleches? Es wurde ein zweites Be-Blech beschafft. Es zeigte den gleichen Effekt wie das erste.

Die Beobachtungen wurden zum Teil von vier verschiedenen Beobachtern kontrolliert.

b) *Ausbeute.* Die Ausbeutemessung ist infolge der geringen Intensität der Szintillationen eine recht anstrengende Tätigkeit. Bei 120 kV beobachtet man rund 100 Teilchen gleichzeitig. Erniedrigt man die Zahl auf etwa 30 pro Minute, um die Teilchen wirklich zählen zu können, dann setzt sehr bald die Aufmerksamkeit des Beobachters aus. Es wurde daher auf folgende

Weise vorgegangen: Bei Bor wurde zunächst die Gesamtzahl der auf dem Leuchtschirm sichtbaren aber nicht zählbaren Szintillationen geschätzt und das Ergebnis mit Hilfe einer kleinen Lochblende kontrolliert, die nur 1% des Leuchtschirmes freiließ, so daß die Szintillationen zählbar wurden. Nachdem dies Verfahren bei Bortrümmern eingeübt worden war, wurde es auf das Be übertragen. Selbstverständlich erreicht man damit keine Präzisionsmessung. Der Fehler dürfte aber nicht größer sein als die Unterschiede zwischen den bisherigen Ausbeuteergebnissen verschiedener oder auch gleicher Beobachter untereinander. Die Ausbeute war bei 120 kV etwas größer als bei Bor. (Diese Tatsache wurde auch von einem zweiten Beobachter festgestellt.) Bei einer Protonenstromstärke von $2 \cdot 10^{-5}$ Amp. erhielt man auf die Leuchtschirmfläche von 120 mm^2 in 18 mm Entfernung vom Präparat bei Be rund 6000 Szintillationen pro Minute, bei Li etwa ebensoviel, bei Bor dagegen rund 5000 Szintillationen. Dabei dürfte die Zahl für Be eher zu klein als zu groß angegeben sein. Die Gesamtzahl (für 4π) ist rund 30 mal größer. Die Ausbeute ist größer als bei Oliphant und Rutherford¹⁾. Doch darf man wohl diesem Unterschied kaum besonderes Gewicht beilegen. Fig. 3 zeigt die Be- α -Ausbeute, verglichen mit Bor und Lithium. Der untere punktierte Teil der Be-Kurve soll andeuten, daß man dort eben noch die Existenz der Trümmer angeben kann, nicht aber mehr die relative Ausbeute.

Die Zertrümmerung war bis zu 80 kV herab feststellbar; es sei aber ausdrücklich betont, daß die Apparatur nicht für niedrige Spannungen gebaut war. Jedenfalls bedeuten 80 kV durchaus keine prinzipielle untere Grenze.

c) *Reichweite und Natur der Be-Trümmer.* Mit ausgeruhtem Auge erkennt man nach einiger Übung leicht, daß es sich bei den Be-Trümmern nicht um eine bestimmte Reichweitengruppe handelt, sondern um einen ganzen Bereich, wahrscheinlich bis zur Reichweite Null hinab. Jedenfalls beobachtet man hinter einer Schirmschutzfolie (Al von $3 \cdot 0,8 \text{ mm}$ Luftäquivalent) ein Gewimmel von Szintillationen aller Deutlichkeitsgrade, deren Unterschiede keinesfalls von der durch die Folie bedingten Reichweitenschwankung herrühren kann. Schaltet man nacheinander immer mehr Folien vor, dann nimmt sowohl die Zahl der Szintillationen als auch ihre Deutlichkeit ab. Nach 6 mm Luftäquivalent findet man eben noch Andeutungen, nach 6,8 mm ist praktisch alles verschwunden.

¹⁾ M. L. Oliphant u. D. E. Rutherford, Proc. Roy. Soc. London (A) **141**, 267, 1933.

In Fig. 4 sind nur die deutlich erkennbaren Szintillationen eingetragen, das darunter liegende undeutliche Gewimmel ist natürlich nicht quantitativ erfaßbar.

Für die Umrechnung der Al-Dicken in Luftäquivalente steht leider kein entsprechend kurzreichweitiger radioaktiver α -Strahler zur Verfügung.

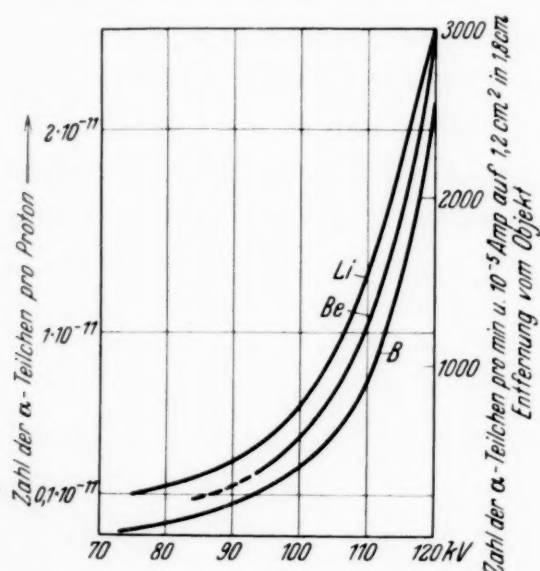


Fig. 3.
Trümmerausbeute an Be,
verglichen mit Li und Bor.

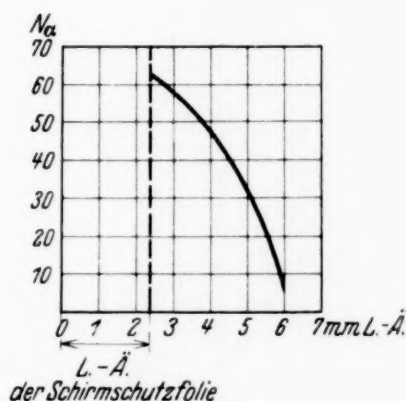


Fig. 4.
Absorptionskurve der Be-Trümmer.

Es wurde daher auf folgende Weise verfahren: die Zahl der α -Teilchen eines Poloniumpräparates wurde durch Abdeckung ungefähr auf die Zahl der Be-Trümmer gebracht und ihre Reichweiten so weit reduziert, daß die Szintillationen nach Einschalten der erwähnten Al-Folien in das Reichweitenende eben verschwanden. Beim Vergleich dieser Po- α -Szintillation mit den Be-Trümmern ergab sich weitgehende Gleichartigkeit mit dem einzigen Unterschied, daß bei allen Folien der Anteil der undeutlichen Szintillationen beim Be größer war als beim Po. Die natürliche Inhomogenität der Be- α -Teilchen ist also größer als die statistische Reichweiteschwankung der Po- α -Teilchen am Ende ihrer Reichweite (± 1 mm) in Übereinstimmung mit der Absorptionskurve in Fig. 4. Die Be-Trümmer bestehen danach aus einem inhomogenen Bereich von α -Teilchen mit einer Maximalreichweite zwischen 6 und 7 mm, also einer Energie zwischen Null und $(1,1 \pm 0,1) \cdot 10^6$ e-Volt. Außer diesen Teilchen wurden auch relativ intensive Teilchen mit Reichweiten zwischen 1 und 4 cm gefunden. Ihre Zahl war aber sehr gering — etwa 5 bis 10 pro Minute — gegenüber rund 5000 schwachen Szintillationen. Da diese Teilchen auch gelegentlich bei

Messing, Cu und sogar Blei auftreten, so dürfte es sich wohl um Verunreinigung handeln. Eine Oberflächenverunreinigung mit etwa 1⁰/₀₀ Bor würde dafür bereits ausreichen.

d) *Emission harter Strahlung.* Die Inhomogenität der Be-Trümmer und die Tatsache, daß wir in Be bei α -Bestrahlung die stärkste Neutronenquelle haben, läßt vermuten, daß bei der Zertrümmerung von Be auch Neutronen ausgesandt werden. Um eine möglichst große Ausbeute zu bekommen, wurde die aus Fig. 5 ersichtliche Anordnung getroffen.

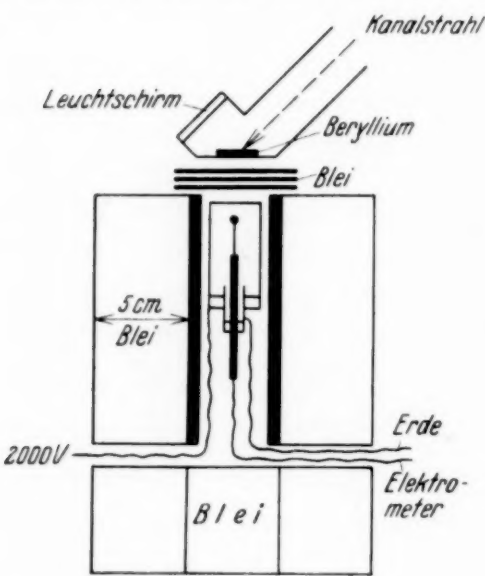


Fig. 5.
Spitzenzähleranordnung zwecks Neutronennachweis.

Etwa 2 cm unterhalb des Be-Blechs befindet sich ein mit feuchtem Cellophan und Al-Folie von 1,2 mm Luftäquivalent abgeschlossener Spitzenzähler in einem Bleizylinder von 5 cm Wandstärke. Nach oben wurde der Pb-Zylinder mit mehreren Bleiplatten bis zu 1 cm Gesamtdicke abgedeckt. Die durch Streuung indirekt auf den Zähler fallende Röntgenstrahlung aus dem Entladungsrohr wurde bereits durch 1 mm Blei abgeschirmt. Bei ein- oder ausgeschalteter Apparatur zeigte das mit dem Spitzenzähler verbundene Elektrometer im Mittel sieben Aus-

schläge in 10 Minuten, auch wenn der Kanalstrahl nicht auf das Be fiel. Wurde der Kanalstrahl magnetisch auf das Be gelenkt, dann erhielt man in der gleichen Zeit 16 Ausschläge. Es wurde abwechselnd je eine Minute mit Feld und eine Minute ohne Feld beobachtet.

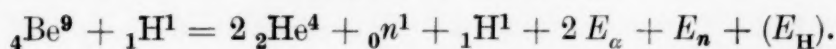
Tabelle 2. Nachweis harter Strahlung bei $H^1 \rightarrow Be$.

	Zahl der Ausschläge pro Minute																			
Ohne $H \rightarrow Be$	0	2	2	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0
Mit $H \rightarrow Be$	2	2	3	2	2	2	1	3	1	1	1	3	1	1	1	3	0	1	1	0

Der Spitzenzähler zeigt also im Mittel pro Minute ein Teilchen an, welches durch $H \rightarrow Be$ verursacht wird und etwa 1 cm Blei durchdringen kann. Ein Einfluß der Bleiabsorberdicke auf die Teilchenzahl wurde innerhalb dieses Bereiches nicht festgestellt. Für genaue Absorptionsmessungen

reicht freilich die geringe Teilchenzahl nicht aus. Der Nachweis, ob es sich um Neutronen oder γ -Strahlen handelt, steht also noch aus. Er soll mit höherer Spannung in Angriff genommen werden, denn wenn die Neutronenausbeute von der gleichen Größenordnung ist wie die der α -Teilchen, dann darf man unter den vorliegenden Verhältnissen mit Rücksicht auf die geringe Absorbierbarkeit der Neutronen und auf die geringe Cellophandicke, aus der noch H-Teilchen den Zähler erreichen können nur die obige Zahl der Spitzenzählerentladungen erwarten.

e) *Zerfallsprozeß*. Wir haben also bei der Zertrümmerung von Be durch H Emission von α -Teilchen und sehr wahrscheinlich auch von Neutronen. Dadurch wird folgender Zerfallsprozeß nahegelegt:



Der Be-Kern zerfällt in 2 α -Teilchen und ein Neutron. Das Proton wirkt nur zertrümmernd, ohne sich mit einem Teil des Be zu vereinigen. Wie sich bei einem solchen Prozeß die freiwerdende Bindungsenergie des Be-Kernes auf die Trümmer verteilt, hängt von deren Winkelverteilung ab. Rutherford¹⁾ zeigt für ähnliche Fälle, daß die Gleichverteilung der Energie auf alle Partner am wahrscheinlichsten ist. Die freiwerdende Bindungsenergie berechnet sich auf folgende Weise:

$$\begin{array}{r} 2 \text{ He} = 8,0022 \text{ (Kernmassen!)} \\ n = 1,0067 \\ \hline 2 \text{ He} + n = 9,0089 \\ \text{Be} = 9,0133 \\ \hline \Delta m = 0,0044 \\ E = 4,09 \cdot 10^6 \text{ e-Volt.} \end{array}$$

Je nachdem, ob das Proton an der Energieverteilung teilnimmt oder nicht, ergibt sich für den einzelnen Partner eine Energie von 1,02 bzw. $1,36 \cdot 10^6$ e-Volt in genügender Übereinstimmung mit der aus der Reichweite bestimmten Energie der α -Teilchen von $(1,1 \pm 0,1) \cdot 10^6$ e-Volt.

Dabei wurde für die Elektronenmassen der Chadwicksche Wert zugrunde gelegt. Der von Curie und Joliot²⁾ angenommene Wert 1,011 steht in Widerspruch zur Tatsache der Be-Zertrümmerung als solcher, unabhängig von irgendwelcher Annahme über die Verteilung der freiwerdenden Bindungsenergie des Be-Kernes, da die dann zur Verfügung stehende Energie nur einen sehr kleinen Teil der tatsächlich beobachteten α -Strahlen-

¹⁾ D.E. Rutherford, Proc. Roy. Soc. London (A) **141**, 276, 1933. —

²⁾ I. Curie u. F. Joliot, Journ. de phys. et le Rad. **4**, 500, 1933.

energie decken könnte. — Desgleichen ist die von Livingston, Henderson und Lawrence¹⁾ aus der Annahme der Zertrümmerung von ${}_1H^2$ berechnete Neutronenmasse (1,0006) mit den gefundenen Be-Zertrümmerungsverhältnissen nicht vereinbar, denn dann müßte die Reichweite der α -Teilchen mindestens 2 cm betragen und wäre dann sehr leicht zu beobachten.

§ 3. Zerfallszeit von Li, Be und Bor nach Eindringung eines Protons.

Ein Atomkern, in den ein Proton eingedrungen ist, unterscheidet sich nicht wesentlich von einem instabilen Kern einer radioaktiven Reihe. Das Gleichgewicht wird unter Umständen in der Weise wieder hergestellt, daß das eingedrungene Geschoß sehr oft an den Innenwänden des Potentialkraters reflektiert werden kann, ohne daß es während dieser Zeit mit den übrigen Kernbestandteilen in destruktive Reaktion tritt; dann kann es den Kern verlassen, ohne dabei eine größere Wahrscheinlichkeit zu beanspruchen als beim Eintritt. Infolge des kleinen Kerndurchmessers und der großen Geschoßgeschwindigkeit ist in sehr kurzer Zeit die erforderliche Zahl der Durchstoßversuche erfüllt. Reagiert jedoch das Teilchen während dieser Zeit mit den andern Kernkomponenten, dann bekommen wir ein instabiles Gebilde, das genau wie ein radioaktives Atom um so rascher zerfallen wird, je höher sein Energieinhalt über der Bindungsenergie der darunterliegenden Stabilitätsstufe liegt. Ob diese Zerfallszeit meßbar ist, steht zunächst offen. Curie und Joliot²⁾ haben einige Fälle gefunden, in denen die Zeitdauer des Überganges in den stabileren Zustand unter Positronenemission recht gut meßbar ist. Was ist nun in dieser Hinsicht bei α -Emission zu erwarten? Im Gebiet der radioaktiven Kerne haben wir die Geiger-Nuttallsche Beziehung $\lg \lambda = A + B \lg R$, die sich in einem sehr weiten Zerfallszeiten-Reichweitenbereich als gute Näherung bewährt hat. Daß wir aber mit ihrer Hilfe keinesfalls aus der α -Reichweite bombardierter Kerne deren Zerfallszeit berechnen können, ist ohne weiteres zu sehen, denn dann müßte z. B. infolge der kleinen Reichweite der mit H bombardierten Borkerne eine derart lange Lebensdauer haben, daß man von seinem Zerfall gar nichts merken würde.

Experimentell kann man auf folgende einfache Weise nach einer eventuellen Zerfallszeit bombardierter Atomkerne fragen: Man stellt sich eine möglichst große Trümmierzahl pro Sekunde her (zählbar nur mit Lochblende) und nimmt dann den Kanalstrahl durch Ausschalten des Magnet-

¹⁾ M. St. Livingston, M. C. Henderson u. E. O. Lawrence, Phys. Rev. **44**, 59, 1933. — ²⁾ I. Curie u. F. Joliot, C. R. **198**, 2089, 1934.

feldes plötzlich fort. Aus der Abnahme des α -Teilchenstromes läßt sich dann die Zerfallszeit der Kerne bzw. eine obere Grenze derselben bestimmen. Die Zahl der Bortrümmer lag bei diesen Versuchen zwischen 100 und 200 pro Sekunde. Die Versuche verliefen alle negativ. Sofort nach der Wegnahme des Kanalstrahles waren sämtliche Szintillationen verschwunden; die verbleibende Zahl ist sicher kleiner als 1 pro Sekunde, d. h. die Halbwertszeit der getroffenen Boratome ist kleiner als 0,1 Sekunden. Entsprechende Versuche bei Li und Be führten zu dem gleichen Ergebnis.

Der scheinbare Widerspruch zwischen diesem Befund und der allein aus der Reichweite der Trümmer (bei Be und Bor) hervorgehenden Lebensdauer wird aber sofort behoben, wenn wir bedenken, daß die Geiger-Nuttallsche Beziehung in Wirklichkeit ein Spezialfall der Gamowschen Formel ist. In letzterer hängt die Zerfallskonstante λ nicht nur von der Geschwindigkeit der emittierten α -Teilchen, sondern auch von der Ladung Z des emittierenden Kernes ab, und zwar geht der Faktor $(z - 2)/v$ in den Exponenten der e -Funktion der Zerfallsgleichung ein. Da im radioaktiven Gebiet (also bei Z mit geringer prozentiger Änderung) die Variation des v von $1,4 \cdot 10^9$ bis $2 \cdot 10^9$ cm/sec⁻¹ die Zerfallskonstante von 10^{-13} bis 10^{-5} wandern läßt, so ist auch ohne besondere Rechnung zu sehen, daß infolge der Gamowschen Formel bei dem kleinen Z der leichten Kerne eine α -Emission derselben mit sehr kleiner Zerfallszeit verbunden sein muß. Für Be und Bor würden sich nach Gamow als Abklingzeiten 10^{-21} bzw. 10^{-22} Sekunden ergeben. Möglicherweise stellen auch diese Zahlen noch obere Grenzen dar, da in diesen Fällen der gesamte Potentialberg zerfällt. Der vorstehende Versuch hätte also gar nicht anders ausfallen können, ohne in Widerspruch zur Gamowschen Auffassung zu stehen. Zwischen dem teilweise sehr langsamen Zerfall der radioaktiven Kerne und dem scheinbar momentanen Zerfall „künstlich“ zertrümmerter Atome besteht also gar kein prinzipieller Unterschied; beide Arten des Zerfalles werden durch die Gamowformel beherrscht.

Daher dürfte bei leichten Kernen eine eventuelle natürliche α -Radioaktivität nur sehr schwer feststellbar sein; es müßten nämlich entweder die α -Reichweiten unter 1 mm liegen, oder die Zerfallskonstante müßte so groß sein, daß das Element längst verschwunden oder doch nur als Folgeprodukt eines vorhergehenden radioaktiven Prozesses denkbar wäre. Von diesem Standpunkt aus sind die von Langer und Raitt¹⁾ gemachten Angaben über die α -Radioaktivität von Be ($R = 1$ cm; $t_{1/2} = 10^{14}$ Jahre)

¹⁾ R. M. Langer u. R. W. Raitt, Phys. Rev. **43**, 585.

mit der Gamowschen Theorie nicht vereinbar; bei $R = 1$ cm sollte die Halbwertszeit 10^{-22} sein, d. h. es dürfte überhaupt kein Be mehr geben. Vgl. auch die anderwärts angestellten negativ ausgefallenen Versuche¹⁾.

§ 4. Zertrümmerungsversuche mit He an Li, Bor und Be.

Die Zertrümmerung von Bor mit α -Strahlen gelingt nur bei $R > 1,4$ cm. Bei $R = 2$ cm beträgt die Ausbeute der mittleren Bor-Protonengruppe etwa 10^{-6} pro α -Teilchen, und bei $R = 1,4$ cm ist sie praktisch verschwunden.

Da auf Grund der Gamowschen Theorie α -Teilchen auch bei viel kleineren Energien in andere Kerne eindringen können, wenn auch mit sehr kleiner Wahrscheinlichkeit, so wurde versucht, mit Hilfe eines starken Stromes von künstlichen α -Teilchen geringerer Geschwindigkeit jene untere Grenze zu unterschreiten, d. h. Bor mit He-Kanalstrahlen zu zertrümmern²⁾.

Der Erfolg war zunächst verblüffend. Es zeigte sich eine sehr große Zahl von Szintillationen von α -Teilchencharakter. Fast denselben Effekt erhält man mit jedem anderen Kanalstrahl. Natürlich handelt es sich dabei nicht um eine Zertrümmerungswirkung des ins Rohr einströmenden Gases, sondern der Effekt ist der unvermeidlichen H-Beimengung zuzuschreiben, die sich aus den Elektroden bzw. organischen Dämpfen immer wieder neu bildet. Selbst stundenlanges Reinigen des Rohres mit O_2 ließ diesen Dreckeffekt nicht ganz verschwinden.

Bei Dazwischenschalten einer Magnetfeldkammer dagegen blieben die Szintillationen selbst bei sehr starken Kanalstrahlströmen innerhalb der schwachen Verseuchung des Szintillationsschirmes (1 pro Minute).

D. h.: Bei 100 kV ist die Zertrümmerungswahrscheinlichkeit von Li, Bor und Be beim Bombardement mit He-Kernen kleiner als 10^{-15} .

Zusammenfassung.

1. Es wird eine Atomzertrümmerungsapparatur (W. Wienske Nachbeschleunigungsmethode) beschrieben.
2. Die bisherigen widerspruchsvollen Ausbeuten bei der Zertrümmerung von Be durch Protonen ergaben für diesen Kern innerhalb der Reihe Li,

¹⁾ L. Rayleigh, Nature **131**, 724, 1933; R. Evans u. C. Henderson, Phys. Rev. **44**, 59, 1933; W. F. Libby, Phys. Rev. **44**, 512, 1933; M. Gans, W. Harkins, H. Newson, Phys. Rev. **44**, 310, 1933. — ²⁾ Das für die Untersuchung benötigte He wurde mir von der Gesellschaft für Lindes Eismaschinen zur Verfügung gestellt, wofür ich auch an dieser Stelle meinen besten Dank ausspreche, insbesondere Herrn Dr. F. Pollitzer, dem Vorstand des Phys.-chem. Laboratoriums in Höllriegelskreuth bei München.

Be, Bor eine Ausnahmestellung; sie sind wohl auf Fehleffekte zurückzuführen, verschwinden jedenfalls quantitativ gegenüber dem mit obiger Apparatur gefundenen Zertrümmerungseffekt: (apparative) untere Zertrümmerungsgrenze 80 kV; Ausbeute von derselben Größenordnung wie bei Li und Bor; α -Emission ($R = 6,5$ mm), verbunden mit durchdringender harter Strahlung (wahrscheinlich Neutronen). Zerfallsprozeß: ${}_4\text{Be}^9 + {}_1\text{H}^1 = 2 {}_2\text{He}^4 + {}_0n^1 + {}_1\text{H}^1$.

3. Die Zerfallszeit von bombardierten Li-, Be- und Borkernen liegt in Übereinstimmung mit der Gamowschen Theorie unterhalb der Beobachtungsgrenze ($t < 0,1$ Sekunden).

4. Die Zertrümmerungsausbeute von Li, Be und Bor durch He-Kanalstrahl bei 100 kV ist kleiner als 10^{-15} .

Der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft bin ich zu großem Dank verpflichtet für die Unterstützung, die sie mir bei dem Aufbau der Apparatur zuteil werden ließ; ohne ihre Hilfe wäre die Ausführung der vorstehenden Arbeit unmöglich gewesen.

Herrn Professor Harms, in dessen Institut die Untersuchung ausgeführt wurde, danke ich freundlichst für die Überlassung der in Frage kommenden Institutsmittel und für gelegentliche Kontrolle der subjektiven Beobachtungen.

Würzburg, Physikalisches Institut der Universität, den 5. Sept. 1934.

Ein Verfahren zur Trennung von Isotopengemischen durch Diffusion in strömendem Quecksilberdampf.

Von G. Hertz in Berlin.

Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 8. September 1934.)

Das früher angegebene Verfahren zur Trennung von Isotopengemischen wird dadurch verbessert, daß an Stelle der Diffusion durch eine poröse Wand die Diffusion in strömendem Quecksilberdampf zur Trennung verwandt wird. Hierzu wird eine Diffusionspumpe besonderer Bauart benutzt, welche die Eigenschaft hat, aus einem Gasgemisch bevorzugt die schneller diffundierenden Bestandteile zu pumpen. Aus zwölf solchen Pumpen wird eine Apparatur zusammengesetzt, welche für die Neonisotopen eine Änderung des Isotopenverhältnisses um etwa den Faktor 10 ergibt.

Bei den bisherigen Versuchen, das von mir angegebene Verfahren zur Trennung von Isotopengemischen¹⁾ auf solche Fälle anzuwenden, in denen das abzutrennende Isotop nur in sehr geringer Menge vorhanden ist, haben sich dadurch Schwierigkeiten ergeben, daß es unmöglich war, das Gas in der Apparatur genügend frei von Verunreinigungen zu halten. Der Grund hierfür liegt hauptsächlich in der sehr großen Oberfläche der Tonrohre, durch welche die Diffusion erfolgt. Wenn diese Schwierigkeiten auch zu überwinden sein werden und zum Teil schon überwunden sind, so schien es mir doch zweckmäßig, nach einer anderen Lösung zu suchen, bei welcher an Stelle der Diffusion durch eine poröse Wand ein anderer Vorgang zur Trennung benutzt wird. Hierfür schien mir in erster Linie die schon früher von mir zur Trennung von Gasgemischen benutzte Diffusion in einem strömenden Gase²⁾ in Frage zu kommen. Da es nach früheren Versuchen aussichtslos erscheinen mußte, durch einmalige Diffusion im strömenden Gase bereits eine weitgehende Trennung von Isotopen zu erreichen, so ergab sich als einzig möglicher Weg, das bei der Diffusion durch Tonrohre benutzte Prinzip der Reihenschaltung einer größeren Zahl von Trennungsgliedern beizubehalten. Als einzelnes Trennungsglied sollte aber nunmehr eine Anordnung benutzt werden, bei welcher nicht mehr die Diffusion durch eine poröse Wand, sondern die Diffusion in einem strömenden Gase die Trennung bewirkt.

Wesentlich für das Verfahren der Reihenschaltung einer großen Zahl von Trennungsgliedern ist, daß in jedem Trennungsglied eine Pumpe vorhanden ist, welche die Gaszirkulation aufrechterhält. In einer Quecksilber-

¹⁾ G. Hertz, ZS. f. Phys. **79**, 108, 1932; H. Harmsen, ebenda **82**, 589, 1933. — ²⁾ G. Hertz, ebenda **19**, 35, 1923.

dampf-Diffusionspumpe ist nun aber bereits ein strömender Dampf vorhanden, durch welchen das gepumpte Gas diffundieren muß. Es lag daher der Gedanke nahe, diesen Quecksilberdampfstrom gleichzeitig zur Trennung eines Gasgemisches zu benutzen. Damit war folgende Aufgabe gestellt: Es sollte eine Diffusionspumpe gebaut werden, welche die Eigenschaft hat, aus einem Gasgemisch in möglichst hohem Maße vorzugsweise einen Bestandteil abzupumpen.

Um zu einer einfachen Lösung zu gelangen, betrachten wir in Fig. 1 den Dampfstrahl, wie er bei der von Langmuir angegebenen einfachsten Form einer Diffusionspumpe aus einem Rohr austritt, um sich dann an der Wand des gekühlten Außenrohres zu kondensieren. Das Gas, welches gepumpt wird, tritt von außen in den Dampfstrahl ein, wird von ihm mitgeführt und bei der Kondensation wieder ausgeschieden. Auf diesem Wege wird das mitgeführte Gas aber auch in der zu den Stromlinien senkrechten Richtung diffundieren und dabei mehr oder weniger in das Innere des Dampfstrahls gelangen. Es wird das um so mehr der Fall sein, je größer die Diffusionsgeschwindigkeit des Gases im Quecksilberdampf ist. Ist das zu pumpende Gas ein Gemisch von zwei Bestandteilen, so wird im Innern des Dampfstrahls ein Gemisch vorhanden sein, welches an der schneller diffundierenden Komponente angereichert ist. Das Maß der Anreicherung wird in ähnlicher Weise von der Stromgeschwindigkeit, der Diffusionskonstante und den geometrischen Abmessungen abhängen, wie es früher für den ähnlichen Fall der Diffusion von innen nach außen abgeleitet worden ist¹⁾.



Fig. 1.

Es ist nunmehr einfach, eine Pumpe zu bauen, welche vorzugsweise den schneller diffundierenden Bestandteil eines Gasgemisches pumpt. Man muß durch die Form des gekühlten Außenrohres dafür sorgen, daß nur der mittlere Teil des Dampfstromes zur Pumpwirkung benutzt wird. Dies ist durch die in Fig. 2 gezeichnete Form zu erreichen. Das zu trennende Gasgemisch befindet sich bei A in dem weiteren Teil des Außenrohres unterhalb der Austrittsstelle des Dampfstrahles. Die Pumpwirkung beschränkt sich auf diejenigen Moleküle, welche durch Querdiffusion, wie sie durch die gestrichelten Linien angedeutet ist, in den mittleren Teil des Dampfstromes gelangen und damit in den oberen engeren Teil B des Außenrohres mitgeführt werden. Die übrigen Moleküle gelangen in den unteren Raum zurück.



Fig. 2.

¹⁾ G. Hertz, l. c. S. 36.

Um festzustellen, ob sich dies experimentell verwirklichen läßt, wurden zunächst Versuche mit Neon-Heliumgemischen gemacht, bei denen sich die Trennung leicht spektroskopisch verfolgen läßt. Der Bau der zuerst erprobten Trennungspumpe ist in Fig. 3 dargestellt. Die Form des durch

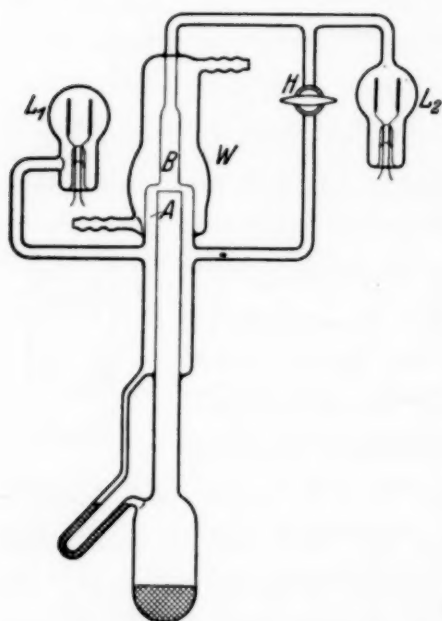


Fig. 3.

den herumliegenden Wassermantel *W* gekühlten Außenrohres weicht aus glas-technischen Gründen von der idealen Form der Fig. 2 ab. Es war jedoch zu erwarten, daß infolge der Erweiterung des Quecksilberdampfstrahles nach seinem Austritt aus dem Rohrende auch hier die Trennungswirkung vorhanden sein sollte. *L*₁ und *L*₂ sind Glimmlampen zur Beobachtung der Spektren der darin vorhandenen Gasgemische. Der Hahn *H* war vorgesehen, um die Zirkulation des Gases verhindern und mit Hilfe zweier in der Figur nicht gezeichneten McLeod-Manometer die durch die Pumpwirkung erzielte Druckdifferenz messen zu können.

Zur Heizung des Siedegefäßes diente eine Bunsenflamme. Wurde in den Apparat ein Neon-Heliumgemisch mit einem Druck von 2 bis 3 mm Hg eingelassen, so zeigte sich bei geöffnetem Hahn sofort ein deutlicher, aber nicht sehr erheblicher Unterschied in der Zusammensetzung des Gases in den beiden Glimmlampen. Dieser Unterschied wurde außerordentlich viel größer, wenn der Hahn geschlossen, also die Zirkulation verhindert wurde. Durch Untersuchung der beiden Fraktionen mit Hilfe der von Harmsen benutzten Diffusionsmethode¹⁾ ergab sich, daß die relativen Konzentrationen von Neon und Helium auf beiden Seiten im Gleichgewichtszustand sich wie etwa 1:30 verhielten. Es war zunächst äußerst überraschend, daß sich überhaupt bei geschlossenem Hahn *H* eine Trennung ergab, denn es war unverständlich, wie das zu Anfang in *L*₂ vorhandene Neon gegen den Dampfstrom nach *L*₁ gelangen sollte. Die Erscheinung erklärt sich durch die Schwankungen in der Geschwindigkeit des Dampfstromes, welche durch das zurücklaufende kondensierte Quecksilber hervorgerufen werden. Jedesmal, wenn die Geschwindigkeit nachläßt und damit die durch den Strahl aufrechterhaltene Druckdifferenz vorübergehend sinkt, tritt ein Teil des in *B* vorhandenen Gases nach *A* zurück. Man kann diese bei ge-

¹⁾ H. Harmsen, l. c. S. 592.

geschlossenem Hahn auftretenden Druckschwankungen an der Veränderung der Dicke des negativen Glimmlichtes in den Glimmlampen beobachten. Die auf diese Weise erhaltene Trennung erwies sich als am größten bei einem Druck von etwa 2 mm Hg und einer verhältnismäßig schwachen Heizung der Pumpe. Die hierbei auftretende Druckdifferenz betrug 0,7 mm.

Der Grund dafür, daß bei Öffnung des Hahnes eine viel schlechtere Trennung erhalten wurde, mag zum Teil daran liegen, daß bei geschlossenem Hahn das in *B* gestaute Gas die Form des Dampfstromes in einer für die Trennung günstigen Weise verändert. Hauptsächlich aber wird dafür die Tatsache maßgebend sein, daß infolge der Zirkulation das Gas in *L*₁ gar nicht dieselbe Zusammensetzung hat wie in *A* in der Nähe derjenigen Stelle, an welcher die Trennung stattfindet. Um diese Fehlerquelle zu beseitigen, und damit erst die Reihenschaltung einer größeren Zahl von Trennungspumpen zu ermöglichen, wurde bei dem für die Isotopentrennung bestimmten Modell das zirkulierende Gas durch ein das Dampfrohr umschließendes weiteres Rohr in die unmittelbare Nähe der Diffusionsstelle geführt. In Fig. 4, welche dieses Modell maßstabgerecht zeigt, ist dieses Rohr mit *E* bezeichnet. Fig. 5 zeigt den für die Trennung wesentlichen Teil in größerem Maßstab. Die Form des gekühlten Außenrohres ist hier der idealen Form der Fig. 2 etwas besser angenähert. Die beiden Rohransätze *R* und *S* sind in der Fig. 4 der Übersichtlichkeit halber in die Zeichenebene gelegt. In Wirklichkeit gehen sie nach vorn und hinten senkrecht zur Zeichenebene. Die Serienschaltung mehrerer Trennungspumpen erfolgt in der Weise, daß die Rohre *P* bzw. *Q* einer Pumpe mit den Rohren *R* bzw. *S* der rechts benachbarten Pumpe verbunden werden, so daß eine Anordnung entsteht, wie sie in Fig. 6 dargestellt ist. Auf diese Weise zirkuliert das Gas auf seinem Wege von *P* nach *Q* durch die Nachbarpumpe hindurch. Bezeichnen wir das an der leichteren Komponente angereicherte zirkulierende Gas als die leichte Fraktion, das im Innern einer Pumpe vorhandene Gas als die schwere Fraktion, so zirkuliert also bei dieser Art der Reihenschaltung die leichte Fraktion jeder Pumpe durch die schwere Fraktion der rechts benachbarten Pumpe hindurch. Als stationärer Zustand wird sich also

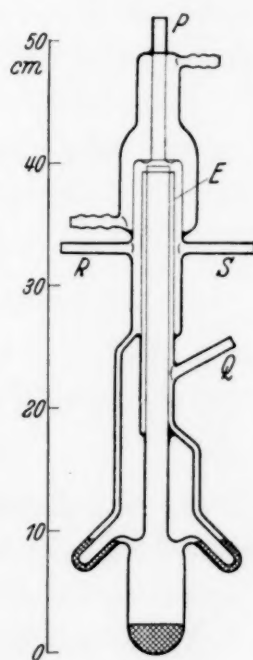


Fig. 4.

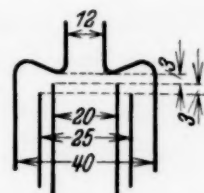


Fig. 5.

ein Zustand ausbilden, in welchem die leichte Fraktion jeder Pumpe dieselbe Zusammensetzung hat wie die schwere Fraktion der rechts benachbarten Pumpe. Damit sind hier die Verhältnisse genau dieselben wie bei der früheren Apparatur, so daß sich die dafür angestellten allgemeinen Überlegungen ohne weiteres übertragen lassen. Ist q der Trennungsfaktor einer einzelnen Trennungspumpe, so ist q^n der Trennungsfaktor der aus n Gliedern bestehenden Gesamtapparatur. Auch bezüglich der Trennungsgeschwindigkeit liegen die Verhältnisse ähnlich, insofern auch hier mit zunehmendem Trennungsgrad eine abnehmende Trennungsgeschwindigkeit zu erwarten ist. Es erwies sich als günstig, in den Zirkulationsweg jeder

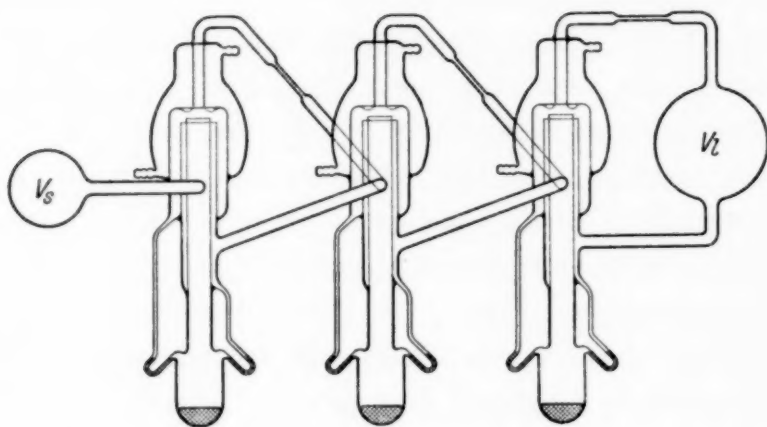


Fig. 6.

Pumpe eine Rohrverengung von 5 cm Länge und 3 mm Durchmesser einzuschalten, in der Weise, wie es in Fig. 6 erkenntlich ist. Diese Figur zeigt gleichzeitig die Anordnung der Endvolumina V_s und V_t .

Um zu prüfen, ob das neue Verfahren sich auch zur Isotopentrennung eignet, wurden mehrere Trennungspumpen in der angegebenen Weise in Reihe geschaltet und am rechten Ende ein Glasballon von 8 Liter Inhalt, am linken dagegen ein zur Beobachtung der Isotopenfeinstruktur geeignetes in flüssiger Luft gekühltes Spektralrohr, sowie ein Kohlerohr zur Absorption der Verunreinigungen angebracht. Die Apparatur wurde mit Neon-Helium von einigen Millimeter Druck gefüllt und die Isotopenzusammensetzung im Spektralrohr mit Hilfe einer Perot-Fabry-Interferenzplatte beobachtet. Schon bei zwei Trennungspumpen war eine schwache Anreicherung des schwereren Neonisotops erkennbar. Bei sechs Trennungspumpen ergab sich eine Anreicherung etwa auf das Dreifache, bei zwölf Pumpen wurde bereits der Zustand erreicht, daß das Gas im Spektralrohr beide Isotope in gleicher Menge enthielt, was eine Änderung des Isotopenverhältnisses um etwa den Faktor 10 bedeutet. Hierzu mußte, um eine

Verarmung an Neon²² im Vorratsballon zu vermeiden, das Gas in diesem einmal erneuert werden. Insgesamt waren zur Herstellung eines solchen Gemisches mit dem Isotopenverhältnis 1:1 nur 45 Minuten nötig. Der günstigste Gasdruck liegt anscheinend zwischen 1 und 2 mm Hg, doch muß dies noch näher untersucht werden.

Die Versuche zeigen, daß das neue Verfahren dem früheren bezüglich des Trennungsgrades gleichwertig ist. Die Trennungsgeschwindigkeit scheint bei dem neuen Verfahren größer zu sein. Da die ganze Apparatur aus Hartglas hergestellt werden kann und die Pumpen nur sehr schwach geheizt zu werden brauchen, so ist das neue Verfahren bezüglich der Betriebssicherheit und der Möglichkeit der Vermeidung von Verunreinigungen dem alten zweifellos überlegen. Ein endgültiges Urteil wird sich erst nach Versuchen mit einer aus einer noch größeren Zahl von Pumpen bestehenden Apparatur gewinnen lassen. Solche Versuche sind in Vorbereitung.

Ein vorläufiger Versuch mit sechs Trennungspumpen hat gezeigt, daß auch die Anreicherung des schweren Wasserstoffisotops mit Hilfe des neuen Verfahrens möglich ist.

Der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft, welche die Durchführung dieser Versuche durch Bewilligung von Mitteln ermöglicht hat, bin ich zu großem Dank verpflichtet. Herrn Dipl.-Ing. H. Barwich sage ich meinen besten Dank für seine tatkräftige Mitarbeit.

Berlin, Physikalisches Institut der Technischen Hochschule.

Bemerkungen über die Lichtstärke bei Spektralapparaten, Spektrographen und Monochromatoren.

Von Carl Leiss in Steglitz.

(Eingegangen am 23. August 1934.)

Kürzlich ist in dieser Zeitschrift 88, 270, 1934 eine Mitteilung über „Ein lichtstarker Monochromator“ veröffentlicht worden mit der einleitenden Bemerkung: „Beschreibung eines Monochromators mit Kollimatorlinse vom Öffnungsverhältnis 1:1.“

Da der Hinweis auf ein Öffnungsverhältnis von 1:1 in Anbetracht der Kürze der Mitteilung leicht zu Irrtümern Anlaß geben kann, sei mir gestattet, dazu kurz folgendes auszuführen: Wohl kann das Öffnungsverhältnis des Kollimators z. B. 1:1 sein, aber wenn das Objektiv des Austrittsrohres z. B. 1:3 hat, dann ist eben dieses Öffnungsverhältnis nur allein — also 1:3 — für die Lichtstärke des Spektralapparates usw. *maßgebend* und nicht das Öffnungsverhältnis des Kollimators. In diesem Falle ist ein Öffnungsverhältnis von 1:1 im Kollimator viel eher ein Nachteil als ein Vorteil. Im Austrittsspalt bzw. in der Bildebene des Objektivs soll die Lichtquelle in der Regel so abgebildet werden, als befände sich die Lichtquelle selbst am Ort des Austrittsspalt oder in der Brennebene des Fernrohrobjektivs, weil damit das Maximum an Lichtstärke im Apparat bei gegebener Lichtquelle erhalten wird. Das erreicht man aber viel besser, wenn in der bisher meist üblichen Weise der Kollimator die gleichen optischen Verhältnisse wie das Austrittsrohr hat oder wenn die Brennweite des Kollimatorobjektivs noch größer als die des Objektivs vom Austrittsrohr bei gleichem Durchmesser ist.

Haben wir z. B. einen Kollimator mit einem Objektiv von 10 cm Durchmesser mit 10 cm Brennweite und im Austrittsrohr ein Objektiv von 10 cm Durchmesser bei $f = 30$ cm, dann dürfte, wenn der Austrittsspalt z. B. = 0,1 mm weit gewählt wird, der Eintrittsspalt nur $\frac{1}{3}$ so breit — also nur 0,033 mm — weit genommen werden, sofern er, wie meist erwünscht, im Austrittsspalt in gleicher Größe abgebildet werden soll; das macht für den Eintrittsspalt einen Präzisionsspalt erforderlich. (Natürlich wird auch die Höhe des Eintrittsspalt in demselben Verhältnis wie seine Breite vergrößert bzw. verkleinert in der Brennebene des Austrittsrohres abgebildet.) Wenden wir hingegen auf beiden Seiten, der Eintritts- und Austrittsseite, gleiche Brennweiten an, dann können auch beide Spalte gleich weit sein. Wird dagegen auf der Eintrittsseite die Brennweite

doppelt so groß gewählt wie auf der Austrittsseite (bei gleichen Objektivdurchmessern), dann können wir den Eintrittsspalt doppelt so weit machen und verlieren dabei auch viel weniger Licht durch Beugung, als bei einem übertrieben großen Öffnungsverhältnis des Kollimators nebst dem erforderlichen engen Spalt; bekanntlich wird der *Lichtverlust durch Beugung bei enger Spaltweite außerordentlich groß*.

Ein Monochromator mit dem wahren Öffnungsverhältnis von 1:3, mit dem wir es hier zu tun haben, würde in außerordentlichem Maße an Lichtstärke (bei gleicher spektraler Reinheit) im Austrittsspalt gewinnen, wenn man z. B. als Kollimatorlinse ein Objektiv von ebenfalls 100 mm Durchmesser, aber statt der Brennweite von 100 mm eine Brennweite von 600 mm (z. B.) wählen würde und dann die Lichtquelle dicht vor dem Eintrittsspalt aufstellt oder eine einfache Linse zur Abbildung der Lichtquelle auf dem Eintrittsspalt anwendet.

Noch andere Nachteile hat indessen das große Öffnungsverhältnis 1:1 des Kollimatorobjektivs. Von seinen drei Linsen sind nur zwei miteinander verkittet, so daß bei ihren verhältnismäßig starken Wölbungen der Lichtverlust durch Reflexion recht beträchtlich und viel größer wird, als bei den Objektiven von geringerem Öffnungsverhältnis. Ferner erfordert ein derartig großes Öffnungsverhältnis auf der Kollimatorseite zur Ausleuchtung des Objektivs ein sehr kostspieliges unverkittetes dreiteiliges und weitgehend korrigiertes Kondensorsystem (mit wiederum überaus starken Lichtverlusten durch Reflexion); dagegen genügt bei dem in jeder Beziehung vorzuziehenden Kollimatorobjektiv von kleinerem Öffnungsverhältnis zur Beleuchtung schon eine gewöhnliche Linse oder ein einfacher Achromat von geringem Öffnungsverhältnis, um die Lichtquelle auf dem Spalt abzubilden und dabei das Objektiv voll auszuleuchten.

Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß für Monochromatoren, die zur Beleuchtung anderer Instrumente, wie z. B. Spektrometer, Stufengitter, Polarisationsapparate, Kompensatoren, Polarisationsphotometer usw., dienen sollen, ein sehr großes Öffnungsverhältnis keinen Vorteil bringen wird, da die große Öffnung der Strahlenbüschel in diesem Falle doch nicht voll ausgenutzt werden kann.

Berichtigung zu der Arbeit: „Zur Theorie der Magnetostriktion“¹⁾.

Von Takesi Hayasi in Sendai.

(Eingegangen am 6. April 1934.)

Kürzlich ist es den Herren Becker²⁾ und Kornetzki³⁾ durch ein sehr geschicktes Verfahren gelungen, die Abhängigkeit der Magnetostriktion des ferromagnetischen Ellipsoids von der äußeren Form experimentell nachzuweisen. Hierbei hat Herr Becker meine oben genannte Arbeit zitiert. Bei dieser Gelegenheit sei es mir gestattet, ein Versehen in meiner Arbeit folgendermaßen zu berichtigen:

An der Ordinaten-skala in Fig. 2 (S. 187) lies 10^{-5} statt 10^{-6} .

Für die gleiche Figur sind die Werte der elastischen Konstanten des Eisen-Einkristalls wie folgt angenommen:

$$c_{11} = 2,7 \cdot 10^{12} \text{ dyn/cm}^2, \quad c_{12} = 1,1 \cdot 10^{12} \text{ dyn/cm}^2, \\ c_{44} = 0,8 \cdot 10^{12} \text{ dyn/cm}^2.$$

Diese Konstanten wurden aus den Daten des Torsionsmoduls μ und des Kompressionsmoduls k vom Eisen-Polykristall

$$\mu = 0,8 \cdot 10^{12} \text{ dyn/cm}^2, \quad k = 1,6 \cdot 10^{12} \text{ dyn/cm}^2,$$

unter der Annahme der Isotropie berechnet, weil die Konstanten des Einkristalls damals nicht bekannt waren. Auf Grund der später erschienenen Messungsergebnisse⁴⁾ für den Eisen-Einkristall ist diese Figur der Magnetostriktion an anderer Stelle⁵⁾ verbessert worden.

Dort ist ferner der folgende Umstand erläutert, daß die Abhängigkeit der Magnetostriktion von dem Dimensionsverhältnis ebenfalls für die polykristallinen Ferromagnetika ganz allgemein gültig ist. In der Tat kann man aus den Formeln (18), (19) und (14) meiner Arbeit die Formel (9, 1), (9, 2) und (9, 3) von Herrn Becker²⁾ leicht ableiten, obschon natürlich die Ergebnisse von Herrn Becker im technischen Sättigungszustand tief eingehend sind. Der Grund dafür liegt darin, daß der von der

¹⁾ T. Hayasi, ZS. f. Phys. **72**, 177, 1931. — ²⁾ R. Becker, ebenda **87**, 547, 1934. — ³⁾ M. Kornetzki, ebenda **87**, 560, 1934. — ⁴⁾ E. Goens u. E. Schmidt, Naturwissensch. **19**, 520, 1931. — ⁵⁾ T. Hayasi, Sci. Rep. Tchoku-Univ. **21**, 268, 1932.

äußeren Form abhängende Anteil der Magnetostriktion der Wechselwirkung zwischen den voneinander weit entfernten Dipolen zuzuschreiben ist, wobei die Einzelheiten der Gittertypen oder der Orientierungen ganz belanglos sind.

Die Werte von μ und k in der Arbeit von Herrn Kornetzki sind dieselben wie in meiner ersten Arbeit. Es ist leicht verständlich, daß die Kurve von A_{11} in meiner Arbeit über die Abhängigkeit von dem Dimensionsverhältnis mit der Kurve des Längseffekts von Herrn Kornetzki (Fig. 2), außer der Verschiebung der Ordinaten-skala, vollständig übereinstimmt.

Sendai, Physikalisches Institut der Tohoku-Universität, März 1934.

Berichtigung zu dem Artikel:

Über die Verallgemeinerung des Michelson-Versuches.¹⁾

Von Ludwig Baumgardt in Berlin.

Ich werde darauf aufmerksam gemacht, daß die Streifenverschiebung, welche Absoluttheorie und Lorentz-Hypothese vom „entscheidenden“ Michelson-Versuch fordern, *n*mal so groß ist als von mir errechnet:

Die den Nenner des Ausdruckes (3) für die Verschiebung bildende Wellenlänge des Lichtes im stark brechenden Mittel (n) ist irrtümlich mit dem Vakuumwert λ statt mit λ/n angesetzt worden.

Die richtiggestellte Beziehung (3) lautet demnach

$$\Delta Z = 2 \frac{l}{\lambda/n} [\beta]^2 \left[1 - \left(\frac{1}{n} - \alpha \right)^2 \right] = 2l[\beta]^2 \underbrace{\left[n \frac{1 - \left(\frac{1}{n} + \lambda \frac{dn}{d\lambda} \right)^2}{\lambda} \right]}_{\text{Optischer Faktor}}.$$

In der Zusammenstellung für das Ausführungsbeispiel wird, da $n = 1,6241$, der Optische Faktor statt 12730 richtig 20675 und die Streifenverschiebung statt 6,25 richtig 10,15.

¹⁾ ZS. f. Phys. 90, 327, 1934.

Autorenregister.

- Ambrosen, J. Über den aktiven Phosphor und das Energiespektrum seiner β -Strahlen S. 43.
- Apelt, Gerhard. Einfluß von Belastungsgeschwindigkeit und Verdrehungsverformung auf die Zerreißfähigkeit von Glasstäben. S. 336.
- Bachem, Ch. und Hiedemann, E. Einige Interferenzversuche mit Ultraschallwellen. S. 418.
- Bartelt, O. Zur Kenntnis des Selenfunktenspektrums Se II. S. 444.
- s. Meißner, K. W.
- Barth, Hans. Über das Intensitätsverhältnis der Hyperfeinstrukturkomponenten der Cäsiumlinie $\lambda = 4555 \text{ \AA}$ und das Kernmoment der Cäsiumatome. S. 272.
- Baumgardt, Ludwig. Berichtigung zu dem Artikel: Über die Verallgemeinerung des Michelson-Versuches. S. 819.
- Bechmann, R. Messung der Schallgeschwindigkeit in anisotropen Medien, insbesondere in Quarz mittels piezoelektrischer Erregung. S. 670.
- Becker, A. und Schaper, Ilsemarie. Temperaturabhängigkeit der totalen Trägerbildung in Luft. II. S. 422.
- Betz, Hans s. Güntherschulze, A.
- Beutler, H. Über Absorptionsspektren aus der Anregung innerer Elektronen. VII. Das Rubidiumspektrum zwischen 900 und 600 \AA aus der Anregung der $(4p)^6$ -Schale (Rb Ib). S. 131.
- und Demeter, W. Über die Absorptionsserien des Thallium-Bogenspektrums (Tl I) und ihren Störungsterm $6s(6p)^2\ ^4P_{1,2}$. S. 143.
- — Über Absorptionsspektren aus der Anregung innerer Elektronen. VIII. Das Thalliumspektrum zwischen 2500 und 1400 \AA aus der Anregung der $(6s)^2$ -Schale (Tl Ib). S. 202.
- Beutler, H. und Demeter, W. Über Absorptionsspektren aus der Anregung innerer Elektronen. IX. Das Thalliumspektrum zwischen 900 und 600 \AA aus der Anregung der $(5d)^{10}$ -Schale (Tl Ic). Anhang: Vergleich des Tl Ic-Spektrums mit den Termen aus der ultraweichen Röntgenstrahlung. S. 218.
- Bomke, Hans. Über die Natur der metallischen Bindung. S. 400.
- Braunbek, Werner. Untersuchungen an Gasentladungen mit einem Elektrolyt als Kathode. S. 184.
- Bünger, Walter. Über die Messung sehr kleiner Kapazitätsänderungen. S. 679.
- Câmpân, T. I. Über die Stromverteilung an der Kathode einer Glimmentladung. S. 111.
- David, E. Spinwechselwirkung mit Austausch bei Alkaliatomen. S. 289.
- Deaglio, R. Temperaturkoeffizient der elektrischen Leitfähigkeit in dünnen Metallschichten. S. 657.
- Demeter, W. s. Beutler, H.
- Döpel, R. Atomzertrümmerungsversuche mit H und He an leichten Elementen. S. 796.
- Eckstein, L. s. Meißner, K. W.
- Fürth, Reinhold und Zuber, Rudolf. Untersuchungen über Diffusion in Flüssigkeiten. VI. Die Neukonstruktion eines Mikrodifusionsapparates zur Diffusionsmessung an ungefärbten und gefärbten Flüssigkeiten. S. 609.
- Gerlach, W. und Siebertz, K. Über Edelgas-Quecksilberlampen. S. 37.
- Glaser, Walter. Stationäre Trägheitsfelder in beschleunigten Bezugssystemen. S. 169.
- Grünert, Horst. Die elektrolytische Ventilwirkung in geschmolzenen Salzen. S. 49.

- Güntherschulze, A. Der Ionenmantel-effekt in Gasentladungen. S. 724.
- und Betz, Hans. Die Elektronen-strömung in Isolatoren bei extremen Feldstärken. S. 70.
- Gupta, A. K. Sen. Das Bandenspektrum des Manganoxys. S. 471.
- Hayasi, Takesi. Berichtigung zu der Arbeit: „Zur Theorie der Magneto-striktion“. S. 818.
- Hedfeld, K. s. Scheib, W.
- Helbig, Kurt. Photochemische Eigen-schaften synthetischer Steinsalzkri-stalle. Rotverschiebung der Färbungs-Absorptionsbande durch plastische Verformung. S. 573.
- Hellmann, R. Der Koeffizient der Elek-tronenionisierung für Stickstoff bei geringem Druck. S. 556.
- Die Quarzlampe als Vorionisator. S. 569.
- Hertz, G. Ein Verfahren zur Trennung von Isotopengemischen durch Diffusion in strömendem Quecksilberdampf. S. 810.
- Herzberg, G. und Spinks, J. W. T. Über das Rotationsschwingungsspektrum des Acetylens (C_2H_2). S. 386.
- Herzberger, M. Über ein Dualitäts-prinzip in der Optik. S. 323.
- Hettner, G., Pohlman, R. und Schu-macher, H. J. Die Struktur des Ozon-Moleküls und seine Banden im Ultrarot. S. 372.
- Hiedemann, E. s. Bachem, Ch.
- und Seifen, N. Optischer Nachweis der Oberschwingungen eines Piezoquarzes und der starken Abflachung seiner Resonanzkurve durch Flüssigkeits-dämpfung. S. 413.
- Jacobsen, J. C. Eine Vorrichtung zur Messung schwacher Ionisierungsströme. S. 167.
- Jacyna (Jacyno), Witold. Die Eigen-schaften der reellen Gase auf Grund der thermodynamischen Zustandsglei-chung. I. Der Joule-Thomson-Effekt des Heliums in Abhängigkeit vom Druck und von der Temperatur. S. 349.
- Jacyna (Jacyno), Witold. Bemerkung über die Gültigkeitsgrenzen des Theorems der präliminaren Auswahl der willkürlichen Funktionen in der thermodynamischen Zustandsgleichung. S. 353.
- Jaeckel, R. Versuche mit Neutronen aus Aluminium und Beryllium. S. 493.
- Jaumann, Johannes und Stipa, Viktor. Eine neue Methode zur Messung der Elektrostriktion von Gasen. S. 685.
- Jentzsch, Felix und Steps, Hans. Die Winkelabhängigkeit des Brechungs-index bei Röntgenstrahlen. S. 151.
- Jordan, P. Austauschprobleme und zweite Quantelung. S. 284.
- Körwien, Hanns. Die Dispersion des Heliums im Grundzustand nach der Wellenmechanik. S. 1.
- Lay, H. Die Fluoreszenzausbeute des L-Gebiets. S. 533.
- Absorptionskoeffizienten von Röntgen-strahlen. S. 551.
- Leiss, Carl. Bemerkungen über die Lichtstärke bei Spektralapparaten, Spektrographen und Monochromatoren. S. 816.
- Ludloff, H. Über eine Ableitung der Magnetisierungsfunktion von Ferro-magnetika, die im ganzen Temperatur-gebiet gültig ist. S. 742.
- Majumdar, R. C. Die Transportphäno-mene in einem ionisierten Gas. S. 706.
- Mattauch, J. Zur Systematik der Iso-topen. S. 361.
- Meißner, K. W., Bartelt, O. und Eck-stein, L. Über das Selen-Bogen-spektrum Se I. S. 427.
- Meyeren, W. v. Ein Beitrag zur elek-trischen Aufzehrung von Gasen bei sehr geringen Drucken. II. S. 727.
- Mie, Kurt. Über Resonanz-Bandenzüge des HD-Wasserstoffs im Gebiet 1650 bis 1000 Å. S. 475.
- Mönch, G. Voltaspannung und Thermo-spannung des Cu_2O . S. 124.
- Zur Theorie des Kristallphotoeffektes. S. 264.
- und Stühler, R. Beiträge zum Kri-stallphotoeffekt. S. 253.

- Mrozowski, S. Absorptionsmessungen in den Bandenspektren der Zn- und Cd-Dämpfe. S. 600.
- Nagy, Béla v. Sz. Ein Verfahren zur Gewinnung von Atomformfaktoren. S. 105.
- Perucca, E. Die Konduktanz dünner Metallschichten und die oberflächliche Leitfähigkeit der Metalle. S. 660.
- Picht, Johannes. Das Huygenssche Prinzip in Anwendung auf Zylinderwellen. S. 717.
- Pip, Otto. Über das anodische Verhalten des Thalliums in den Halogenwasserstoffsäuren. S. 329.
- Podaschewsky, M. N. Über die photoelektrische Methode zur Bestimmung der Elastizitätsgrenze des Steinsalzkrystals. S. 97.
- Pohlman, R. s. Hettner, G.
- Poser, Edgar. Farbenzentren und plastische Verformung von synthetischen Steinsalzkristallen mit Fremdatomen. S. 593.
- Rodloff, Günther. Über die Ultraviolettabsorption an Kaliumnitrat, Nitriten und Schwefelkohlenstoff bei tiefen Temperaturen. S. 511.
- Schallamach, A. s. Suhrmann, R.
- Schaper, Ilsemarie s. Becker, A.
- Scheib, W. und Hedfeld, K. Die Rotationsschwingungsbande der Blausäure bei 10381 Å. S. 792.
- Schumacher, H. J. s. Hettner, G.
- Seidl, F. Elektrische Leitfähigkeit von Bernstein bei verschiedenen Drucken. S. 318.
- Seifen, N. s. Hiedemann, E.
- Siebertz, K. s. Gerlach, W.
- Sitte, Kurt. Untersuchungen über Diffusion in Flüssigkeiten. VII. Über eine Abänderung der Zuberschen Mikrodiffusionsmethode zur Diffusionsmessung bei sehr kleinen Konzentrationen. S. 617.
- Sitte, Kurt. Untersuchungen über Diffusion in Flüssigkeiten. VIII. Zur Theorie der „Grenzschicht“ verdünnter Elektrolytlösungen. S. 622.
- Untersuchungen über Diffusion in Flüssigkeiten. IX. Experimente über die gegenseitige Diffusion verdünnter Elektrolytlösungen. S. 642.
- Untersuchungen über Diffusion in Flüssigkeiten. X. Theoretische Bemerkungen über die Potentialdifferenzen zwischen einander berührenden, verdünnten Elektrolytlösungen. S. 651.
- Spinks, J. W. T. s. Herzberg, G.
- Steensholt, Gunnar. Über die Stabilität der Ionengitter. S. 765.
- Steps, Hans s. Jentzsch, Felix.
- Stipa, Viktor s. Jaumann, Johannes.
- Stühler, R. s. Mönch, G.
- Suhrmann, R. und Schallamach, A. Über die Temperaturabhängigkeit des Photoeffektes reiner und mit Fremdatomen besetzter Metalloberflächen bei tiefen Temperaturen. S. 775.
- Świątosławska, Janina. Beitrag zur Erforschung der Bandenfluoreszenz des Cadmiumdampfes. S. 354.
- Tammann, G. Die Abhängigkeit der magnetischen Suszeptibilität des Wassers und seiner KJ-Lösungen von der Temperatur. S. 410.
- Thierbach, Gerhard. Zerreißfestigkeit plastisch verformter Glasstäbe. S. 344.
- Upmark, Aug. Elektrische Spitzenwirkungen bei sphärischen Leitern atomarer und subatomarer Größe. S. 737.
- Woltersdorff, Wilhelm. Über die optischen Konstanten dünner Metallschichten im langwelligen Ultrarot. S. 230.
- Zimmermann, G. Erklärung des Normalgradienten Null der Edelgase durch Diffusion. S. 767.
- Zuber, Rudolf s. Fürth, Reinhold.

über
Zur
nter

in
über
nter

in
Be-
iffe-
den.
651.

abi-

nes.

A.
des
md-
hen

zur
des

der
des
von

keit
44.
en-
ern
37.
pti-
all-
rot.

aal-
rch